

**Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка**

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

Випуск 10

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
2014

УДК 519.6:519.7
ББК 22
М34

Свідоцтво про державну реєстрацію друкованого засобу масової інформації:
Серія КВ № 14521-3492Р від 25.06.2008 р.

Збірник наукових праць включено до переліку наукових фахових видань
ВАК України з фізико-математичних наук (постанова Президії ВАК України
від 14 жовтня 2009 р. № 1-05/4, Бюлетень ВАК України №11, 2009)

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка,
протокол № 7 від 27 червня 2014 року.

Рецензенти:

В. І. Герасименко, д.ф.-м.н., професор, провідний науковий співробітник
Інституту математики НАН України;

В. В. Городецький, д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри алгебри та інфор-
матики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича.

Редакційна колегія:

Відповідальний редактор
Ю. Г. КРИВОНОС
академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

Заст. відповідального редактора
А. Ф. ВЕРЛАНЬ
член-кор. НАПНУ, д.т.н., проф.

Відповідальний секретар
І. Б. КОВАЛЬСЬКА
к.ф.-м.н., доцент

В. К. ЗАДІРАКА
член-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

В. П. КЛИМЕНКО
д.ф.-м.н., проф.

І. М. КОНЕТ
д.ф.-м.н., проф.

М. О. ПЕРЕСТЮК
академік НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

Ю. В. ТЕПЛІНСЬКИЙ
д.ф.-м.н., проф.

А. О. ЧИКРІЙ
член-кор. НАНУ, д.ф.-м.н., проф.

**Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-матема-
М34 тичні науки** : зб. наук. праць / Інститут кібернетики імені В. М. Глуш-
кова Національної академії наук України, Кам'янець-Подільський націо-
нальний університет імені Івана Огієнка ; [редкол.: Ю. Г. Кривонос
(відп. ред.) та ін.]. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський
національний університет імені Івана Огієнка, 2014. — Вип. 10. — 216 с.

У збірнику друкуються результати досліджень вітчизняних та закордонних
науковців, що стосуються проблем застосування математичних моделей в різних
галузях людської діяльності.

Для наукових та інженерно-технічних працівників, аспірантів, студентів.

УДК 519.6:519.7
ББК 22

© Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, 2014

© Кам'янець-Подільський національний
університет імені Івана Огієнка, 2014

ISSN 2308-5878

**V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of
National Academy of Sciences of Ukraine
Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University**

**MATHEMATICAL AND COMPUTER
MODELLING**

Series: Physical and mathematical sciences

Scientific journal

ISSUE 10

Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University
2014

Critics:

V. I. Herasimenko, doctor of physical and mathematical sciences, leading researcher of the Institute of mathematics NAS of Ukraine;

V. V. Horodetsky, doctor of physical and mathematical sciences, head of department of algebra and computer in Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University.

Editorial board:

Yu. G. Krivonos, academician NAS of Ukraine, doctor of physical and mathematical sciences, professor (executive editor);

A. F. Verlan, corresponding member NAPS of Ukraine, doctor of technical science, professor (vice executive editor);

I. B. Kovalska, candidate of physical and mathematical sciences, docent (responsible secretary);

V. K. Zadiraka, corresponding member NAS of Ukraine, doctor of physical and mathematical sciences, professor;

V. P. Klimenko, doctor of physical and mathematical sciences, professor;

I. M. Konet, doctor of physical and mathematical sciences, professor;

M. O. Perestjuk, academician NAS of Ukraine, doctor of physical and mathematical sciences, professor;

Yu. V. Teplinsky, doctor of physical and mathematical sciences, professor;

A. O. Chikriy, corresponding member NAS of Ukraine, doctor of physical and mathematical sciences, professor.

Mathematical and computer modelling. Series: Physical and mathematical sciences : scientific journal / V. M. Glushkov Institute of Cybernetics of National Academy of Sciences of Ukraine, Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University ; [editorial board: Yu. G. Krivonos (executive editor) and others]. — Kamianets-Podilsky : Kamianets-Podilsky National Ivan Ohienko University, 2014. — ISSUE 10. — 216 p.

There are printed results of investigation of national and foreign scientists that concern to problems of practice mathematical models in different spheres of human activity.

For scientific and technical staff, postgraduate students.

© V. M. Glushkov Institute of Cybernetics
of NAS of Ukraine, 2014

© Kamianets-Podilsky National
Ivan Ohienko University, 2014

УДК 519.612

В. С. Абрамчук*, канд. фіз.-мат. наук,

І. В. Абрамчук**, старший викладач

*Вінницький державний педагогічний університет
імені М. Коцюбинського, м. Вінниця,

**Вінницький національний технічний університет, м. Вінниця

КОМБІНОВАНИЙ МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЕЛІПТИЧНИХ РІВНЯНЬ

Запропоновано метод розв'язування різницевих рівнянь $A\bar{x} = \bar{b}$, $A = H + S + V$, що виникають при дискретизації двовимірних крайових задач еліптичного типу. Алгоритм розв'язування об'єднує ітераційний процес з прямими методами розв'язання рівнянь $S_i \bar{x}_i = d_i$, $i = N/m$, де стрічкова $2m + 1$ — діагональна матриця S_i з високою точністю наближає A і має мінімальну ширину, N — число рядків матриці A .

Ключові слова: *різницеве еліптичне рівняння, перетворення структури матриці, розклад Холецкого.*

Вступ. У роботах [1–4] наведено відомості щодо розв'язування модельного різницевого рівняння Пуассона на сітці $N \times N$ (число змінних $n = N^2$). У таблиці 1 подані ресурси для часу і пам'яті, які необхідні для розв'язання рівняння із заданою точністю в умовах відсутності похибок заокруглення, що потребує певної застороги [2]. Більш глибокий аналіз показує, що наведені методи потребують удосконалення, оскільки недостатньо досліджений вплив структури матриці на швидкість збіжності, не сформульовані критерії, за яких метод мав би оптимальну швидкість збіжності. Наведені в таблиці 1 показники з ростом розмірності сіткової матриці для простору \mathbb{R}^2 і, особливо, при переході в простір \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, втрачають свій зміст, оскільки швидкість збіжності сповільнюється, бо методи не налаштовані на структуру дискретного оператора на заданому шаблоні і зростає залежність точності розв'язку від накопичення похибок обчислень. Перехід від модельного різницевого рівняння Пуассона до різницевих апроксимацій диференціальних еліптичних рівнянь гідродинаміки і тепломасоперенесення [3; 4] ще більше поглиблює різницю між теоретичними показниками, наведеними в таблиці 1, і реальними обчисленнями.

Постановка проблеми. Нехай еліптичний диференціальний оператор дискретизується на рівномірній квадратній сітці простору \mathbb{R}^2 за шаблоном «хрест».

Обґрунтувати, що існує така структура матриці A різницевого рівняння, для якої стрічкова матриця S з високою точністю апроксимує матрицю $A = H + S + V$ при мінімальній ширині стрічки S .

Постановка задачі.

1. Розробити метод, що поєднує в собі ітераційний процес з прямими методами розв'язання підзадач для різницевих рівнянь еліптичного типу.
2. Розробити алгоритм швидкого розв'язування різницевого рівняння еліптичного типу.

Щоб побудувати ефективні методи розв'язування різницевих еліптичних рівнянь, узагальнимо поняття: «ітераційні процеси Якобі і Гаусса-Зейделя» та розкриємо зміст « $A(S, m)$ » — перетворення матриці A шляхом упорядкування вузлів сіткової матриці C ».

Розглянемо ітераційний метод

$$\vec{x}^{(k+1)} = W \vec{x}^{(k)} + \vec{f}, \tag{1}$$

узгоджений з системою $A\vec{x} = \vec{b}$, $A \in M_n(\mathbb{R})$, $\text{rank } A = n$, $W \in M_n(\mathbb{R})$, $\text{rank } W = n$, $\vec{x}^* = A^{-1}\vec{b}$, $\vec{x}^* = W \vec{x}^* + \vec{f}$. Розіб'ємо матрицю A на складові: $A = S + H + V$, де $S[n \times n]$ — стрічкова матриця, складена з $2m + 1$ діагоналей матриці A , $m < n$; $H[n \times n]$ ($V[n \times n]$) — матриці, складені з елементів матриці A , що знаходяться нижче (вище) стрічкової матриці S . Розбиття $A = S + H + V$ показано на рисунку 1, O — матриця з нульових елементів.

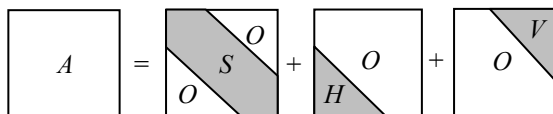


Рис. 1. Розбиття матриці для застосування комбінованого методу

Таблиця 1

Порівняльна складність розв'язання рівняння Пуассона на сітці $N \times N$ ($n = N^2$). У стовпчику 4 позначено: П — прямий, І — ітераційний методи

1. Метод	2. Час	3. Пам'ять	4
Холецького для щільно заповнених матриць	n^3	n^2	П
Явного обергання	n^2	n^2	П
Холецького для стрічкових матриць	n^2	$n^{3/2}$	П
Якобі	n^2	n	І
Гаусса-Зейделя	n^2	n	І
Холецького для розріджених матриць	$n^{3/2}$	$n \log n$	П

Продовження таблиці 1

Спряжених градієнтів	$n^{3/2}$	n	I
Послідовної верхньої релаксації	$n^{3/2}$	n	I
Чебишевського прискорення з SSOR	$n^{5/4}$	n	I
Швидке перетворення Фур'є	$n \log n$	n	II
Блочна циклічна редукція	$n \log n$	n	II
Багатосітковий	n	n	I
Нижня оцінка	n	n	

Означення 1. Розбиття $H + S + V = A$ матриці A назвемо розбиттям з «переважанням стрічкової матриці S з числом діагоналей $2m + 1$ », якщо

$$W = I - S^{-1}A \quad (2)$$

і спектральний радіус $\rho(W) < 1 - \varepsilon$, де $0 < \varepsilon < 1$.

Означення 2. Ітераційний процес (1) назвемо процесом Якобі, якщо

$$W = -S^{-1}(H + V), \quad \vec{f} = S^{-1}\vec{b}; \quad (3)$$

процесом Зейделя, якщо

$$W = -(H + S)^{-1}V, \quad \vec{f} = (H + S)^{-1}\vec{b}; \quad (4)$$

процесом Гаусса-Зейделя (або комбінованим методом), якщо система

$$S \vec{x}^{(k+1)} = -(H + V) \vec{x}^{(k)} + \vec{b} = \vec{d}^{(k)} \quad (5)$$

на кожному k -му кроці розв'язується прямим методом, наприклад, гауссовим виключенням, якщо матриця S довільна невивроджена, або розкладом Холецького, якщо матриця S симетрична і додатно визначена.

Якщо матриці H , S , V розбиті на блоки H_i , S_i , V_i , $i = 0, 1, \dots, t$ (H_0 , V_i — нуль матриці), то ітераційний процес (5) можна реалізувати з уточненням

$$S_i \vec{u}_i^{(k+1)} = -H_i \vec{v}_i^{(k+1)} - V_i \vec{w}_i^{(k)} + \vec{f}_i, \quad i = 0, 1, \dots, t, \quad (6)$$

де вектори \vec{u}_i , \vec{v}_i , \vec{w}_i складові вектора \vec{x} , що відповідають i -му розбиттю матриці A .

Означення 3. $A(S, m)$ — перетворенням матриці A різницевого рівняння називається таке упорядкування вузлів сіткової матриці $C(N)$, яке не змінює ні коефіцієнтів матриці A , ні її властивостей, але змінює структуру матриці A так, що стрічкова матриця S мінімальної півширини $m + 1$ найкраще наближає матрицю $A = H + S + V$ (N — число вузлів сіткової матриці).

Щоб в'яснити як впливає упорядкування вузлів сіткової матриці C на структуру матриці A і які є спільні закономірності для різних еліптичних рівнянь, розглянемо задачі у просторі \mathbb{R}^2 .

1. Модельна задача [1]. Чисельно розв'язати крайову задачу Діріхле для рівняння Пуассона

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y), \quad (x, y) \in D \quad (7)$$

з крайовою умовою

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_D, \quad (8)$$

де D — квадратна (або прямокутна) область, Γ_D — контур області D , $g(x, y)$ — кусково-неперервна функція на Γ_D , f — неперервна на D .

2. Узагальнена задача Діріхле [1]: чисельно розв'язати крайову задачу Діріхле для рівняння

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(B \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(C \frac{\partial u}{\partial y} \right) + Fu = G, \quad (x, y) \in D \quad (9)$$

з крайовою умовою

$$u(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma_D, \quad (10)$$

де B, C — додатні, два рази диференційовні функції по x і y в області D ; $F \leq 0$, F та G — неперервні функції в області D , g — кусково-неперервна на границі області D , D — квадратна або прямокутна область. При дискретизації еліптичного рівняння (7) або (9) на рівномірній квадратній сітці за шаблоном «хрест» дістанемо різницеве рівняння $A\bar{x} = \bar{b}$ з симетричною додатно визначеною матрицею [1].

3. Чисельно розв'язати еліптичне рівняння, наприклад, стаціонарне конвективно-дифузійне [3; 4]

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho r u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho q u) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\gamma \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\gamma \frac{\partial u}{\partial y} \right) + V_p u + V_c, \quad (x, y) \in D \quad (11)$$

з крайовою умовою

$$q_1 \frac{\partial u}{\partial n} = q_2 u + q_3, \quad (x, y) \in \Gamma_D, \quad (12)$$

де (r, q) — компоненти поля швидкості, γ — коефіцієнт дифузії, ρ — густина середовища, $(V_p (< 0), V_c)$ — джерела, що породжують u , \bar{n} — нормаль до поверхні Γ_D , q_1, q_2, q_3 — кусково-неперервні функції змінних x, y .

Спільним для всіх трьох задач є те, що матриці різницевих рівнянь є додатно визначеними. Відповідно до структури сіткової матриці C , змінюється структура матриці A , але зв'язки для шаблону «хрест» залишаються незмінними.

На рисунках 2–6 показані різні схеми упорядкування вузлів двовірної прямокутної (квадратної) сітки та відповідні матриці різ-

ницевого рівняння. Для простоти зображень використовуються різниці рівняння для модельного рівняння (7).

Швидкість збіжності методу Гаусса-Зейделя визначається за формулою $\|\bar{\varepsilon}^{(k+1)}\|_2 \leq \|S^{-1}(N+V)\|_2 \|\bar{\varepsilon}^{(k)}\|_2$ і залежатиме від структури матриці A . Для аналізу швидкості збіжності модифікованого методу Гаусса-Зейделя розв'язання різничевого рівняння розглянемо кожну із структур (рисунки 2–6) упорядкування вузлів сіткової матриці. Не нульовим елементам відповідають заштриховані квадрати.

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15

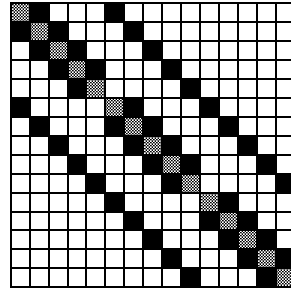


Рис. 2. Точкове природне впорядкування

1	9	2	10
11	3	12	4
5	13	6	14
15	7	16	8

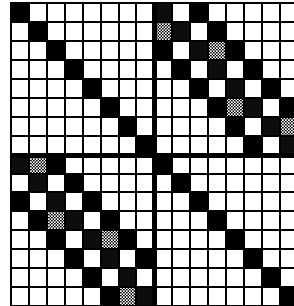


Рис. 3. Чорно-біле точкове впорядкування

1	2	3	4
9	10	11	12
5	6	7	8
13	14	15	16

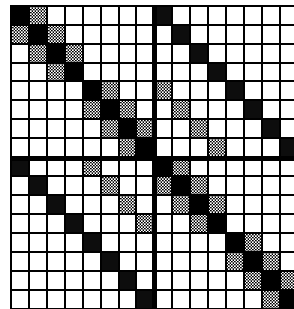


Рис. 4. Чорно-біле впорядкування по лініям

1	2	3	4	5
10	9	8	7	6
11	12	13	14	15

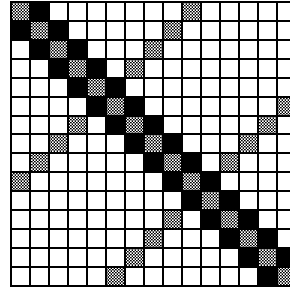


Рис. 5. Хвильове послідовне впорядкування

1	4	7	10
2	5	8	11
3	6	9	12
13	16	19	22
14	17	20	23
15	18	21	24

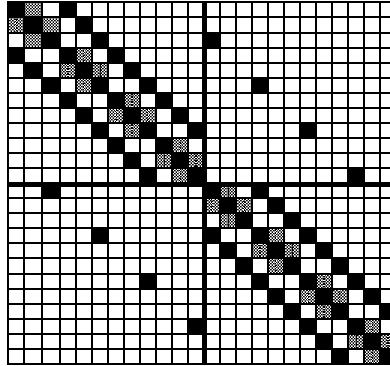


Рис. 6. Смугове поперечне впорядкування

Структури впорядкування вузлів сіткової матриці різницевого рівняння.

Чорно-біле точкове впорядкування вузлів сіткової матриці прямокутної області (рис. 3) — вектор змінних $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $n = N^2$, упорядкований з двох векторів \bar{u}_1, \bar{u}_2 : $\bar{x} = (\bar{u}_1, \bar{u}_2)^T$, що відповідають «чорним і білим» вузлам [1]. Відповідно до упорядкування вектора змінних \bar{x} , матриця A розбивається на блоки; $S_i = D_i$, $i = 1, 2$, — однодіагональні матриці, матриця $S^{-1} = (S_1 \oplus S_2)^{-1}$ слабо наближає A^{-1} , тому модифікований метод Гаусса-Зейделя не має високої швидкості збіжності.

Чорно-біле впорядкування вузлів сіткової матриці по лініям (горизонтальним або вертикальним, рисунок 4) — вектор змінних $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, $n = N^2$, розбитий на два підвектора \bar{u}_1 , \bar{u}_2 (матриця A приймає блочну структуру) [1]. Матриці S_i , $i = 1, 2$, для задач (7)–(10) тридіагональні симетричні додатно визначені і можуть бути розкладені на множники L_i , L_i^T методом Холецкого до початку ітерацій; $V_i = H_i^T$ — трикутні

матриці, що мають по дві ненульові діагоналі [1]. Швидкість збіжності прискорюється модифікованим блочним методом Гаусса-Зейделя (6). Покладемо: $S_i = L_i \cdot L_i^T$, матриці L_i , $i = 1, 2$ — дводіагональні; матриці $S_i^{-1} = (L_i^{-1})^T \cdot L_i^{-1}$, $i = 1, 2$ — тридіагональні; $S_1^{-1}H = X_1$ — нижня матриця Хессенберга, $S_2^{-1}V = X_2$ — верхня матриця Хессенберга. Система рівнянь $A\vec{x} = \vec{b}$ еквівалентна системі:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1 &= -X_1 \bar{u}_2 + \bar{f}_1, \bar{f}_1 = S_1^{-1} \bar{b}_1, \\ \bar{u}_2 &= -X_2 \bar{u}_1 + \bar{f}_2, \bar{f}_2 = S_2^{-1} \bar{b}_2, \\ \bar{x} &= (\bar{u}_1, \bar{u}_2)^T, \bar{b} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2)^T. \end{aligned} \quad (13)$$

Модифікований ітераційний метод Гаусса-Зейделя можна записати у вигляді послідовних процедур:

$$\begin{aligned} \bar{u}_1^{(k+1)} &= -X_1 \bar{u}_2^{(k)} + \bar{f}_1, \\ \bar{u}_2^{(k+1)} &= -X_2 \bar{u}_1^{(k+1)} + \bar{f}_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Зазначимо, що в ітераційному процесі (14) немає потреби обчислювати хессенбергові матриці X_1, X_2 . Якщо матриця S несиметрична (задача (11), (12)), то використовується LU розклад.

Природне впорядкування по лініям (рисунок 2) — матриця S для задач (7)–(10) — тридіагональна симетрична додатно визначена (при необхідності можна розбити на блоки); розклад Холецького $S = L \cdot L^T$; $V = H^T$ — діагональні матриці [1]. Модифікований ітераційний процес Якобі матиме вигляд

$$\bar{x}^{(k+1)} = -S^{-1}(H+V)\bar{x}^{(k)} + S^{-1}\bar{b}$$

(можна застосувати блочний метод Гаусса-Зейделя, розбивши матрицю A на блоки, відповідно до розбиття сіткової матриці по лініям).

Хвильове впорядкування по лініям (рис. 5) — модифікує природне впорядкування, матриця S для задач (7–10) — тридіагональна симетрична додатно визначена. Це дає можливість записати рекурентну формулу виключення Гаусса, що позбавляє необхідності зберігати у явному вигляді множники Холецького.

Має місце.

Лема. Виключення Гаусса в тридіагональній матриці різницевого модельного рівняння для задачі (7), (8), при хвильовому впорядкування вузлів сіткової матриці по лініям, зводить матрицю до дводіагональної з головною одиничною діагоналлю і верхньою наддіагоналлю, складеною з елементів послідовності

$$(a_{i,i+1})_{i=1}^n : a_{1,2} = -\frac{1}{4}, \quad \forall i \in [1; n-1] \quad a_{i+1,i+2} = -1 / \left(4 + \frac{1}{a_{i,i+1}} \right). \quad (15)$$

Послідовність $(a_{i,i+1})_{i=1}^{\infty}$ збігається до числа $1/(2+\sqrt{3})$.

Значимо, що елементи послідовності $(-a_{i,i+1})$ визначають перетворення розширеної матриці (A, \bar{b}) .

Оскільки елементи діагоналей матриці S складені з постійних коефіцієнтів, то виключення Гаусса приводить до рекурентних співвідношень: $z_{n+1} = 4 - \frac{1}{z_n}$, $z_1 = 4$. Застосуємо принцип стиснутих відображень до рівняння $x = \varphi(x) = 4 - \frac{1}{x}$, $x_0 = 4$; $\varphi'(z) = +\frac{1}{z^2} < 1$ для $z > 2$. Перейшовши в послідовності $x_{n+1} = 4 - \frac{1}{x_n}$ до границі для $n \rightarrow \infty$, дістанемо $z = 4 - \frac{1}{z}$, $z + \frac{1}{z} - 2 = 2 \Rightarrow \left(\sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}}\right)^2 = 2 \Rightarrow \sqrt{z} - \frac{1}{\sqrt{z}} = \pm\sqrt{2} \Rightarrow z = 2 + \sqrt{3}$.

Алгоритм розв'язання різницевого модельного рівняння для задачі (7), (8) при хвильовому впорядкуванні вузлів сітки.

Виключення Гаусса приводить до перетворення матриці (A, \bar{b}) за правилами:

1. Для $i = 1$ покласти $z_1 = 4$, розділити не нульові елементи першого рядка на $z_1 = 4$.
2. Для $\forall i = 1, 2, \dots, n$ обчислити $z_i = 4 - \frac{1}{z_{i-1}}$; покласти

$$a_{i,i-1} = 0, \quad a_{i,i} = 1, \quad a_{i,i+1} = -\frac{1}{z_i}, \quad a_{n,n+1} = 0.$$

Інші не нульові елементи i -го рядка матриці (A, \bar{b}) розділити на z_i .

3. Метод Якобі для наближеного розв'язання різницевого рівняння Пуассона зведеться на k -му кроці до зворотної прогонки для дводіагональної матриці.

Ітераційний метод Якобі виявився ефективним при почергових прогонках по сітці: зверху-вниз, знизу-вгору, зліва-направо, з правої сторони — на ліво. У загальному для задачі (9), (10), розклад $L \cdot L^T$ тридіагональної матриці S буде залежати від коефіцієнтів диференціального оператора.

Смугове поперечне впорядкування вузлів сіткової матриці прямокутної області $N \times M$ (рисунок 6) — вектор змінних $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ розмірності $n = N \times M$, розбитий на $\frac{N}{m}$ частин, де $m \geq 3$ — кількість рядків у кожній смузі.

Узагальнимо метод (6) розв'язування різницевого рівняння на квадратній сітці, розділеній на смуги з $m \geq 3$ рядків і поперечним упорядкуванням змінних.

Має місце.

Теорема. Для модельного різницевого рівняння для задачі (7), (8) кожній смузі сіткової матриці $C[N \times M]$ відповідає рівняння

$$D\vec{u}_i = H\vec{v}_i + H^T\vec{w}_i + \vec{f}_i, \quad i \in [1 : N/m]$$

з блочними матрицями $D_i = D$, $H_i = H_i^T = H$ розмірностей $[mM \times mM]$.

Матриця D — симетрична додатно визначена, $2m + 1$ - на діагональ якої збігається з діагоналями матриці A ; матриці $H^T = H$ мають по одній ненульовій діагоналі (нижню та верхню), кожна з яких містить лише M ненульових елементів, рівних -1 . На рисунку 7 показана блочна структура матриці Пуассона. Для узагальненої задачі (9), (10) блочні матриці D_i, H_i можуть приймати різні значення. Якщо матриця A додатно визначена, але не симетрична (задача (11), (12)), то і блочні матриці також не симетричні (або не всі є симетричними, тоді використовується LU — розклад стрічкової матриці S).

Кожна стрічкова матриця $D[mM \times mM]$ (у загальному матриця D_i), $m \geq 3$, має $(m - 2)M$ рядків (стовпців), що складаються з елементів матриці A . З ростом числа m зростає число діагоналей матриці D , а отже і заповненість матриці L у розкладі Холецького $D = L \cdot L^T$. Тому найбільш раціональним співвідношенням між прискоренням швидкості збіжності наближень (6) і числом обчислень у матриці L є вибір $m = 4,5$. Для доведення теореми досить застосувати правило природного впорядкування по лініям [1].

$$A = \begin{bmatrix} D & H^T & 0 & & \\ H & D & H^T & & \\ 0 & H & D & H^T & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & 0 & H & D \end{bmatrix}$$

Рис. 7. Блочна структура матриці Пуассона

Алгоритм розв'язування різницевого модельного рівняння для задачі (7), (8) при смуговому впорядкуванні вузлів сіткової матриці. У відповідності до структури матриці A (рис. 7) матимемо рівняння

$$\begin{aligned} Du_1^{(k+1)} &= -H^T \bar{w}_1^{(k)} + \bar{f}_1 = \bar{d}_1^{(k+1)}, \\ \forall i = 2, \dots, t-1, \quad Du_i^{(k+1)} &= -H \bar{v}_i^{(k+1)} - H^T \bar{w}_i^{(k)} + \bar{f}_i = \bar{d}_i^{(k+1)}, \quad (16) \\ Du_t^{(k+1)} &= -H \bar{v}_t^{(k+1)} = \bar{d}_t^{(k+1)}, \quad t = \frac{N}{m}. \end{aligned}$$

Скористаємось розкладом матриці $D = L \cdot L^T$, позначивши $L^T \bar{u}_i^{(k+1)} = \bar{y}_i^{(k+1)}$, матимемо для всіх $i \in [1 : t]$:

$$\begin{aligned} L^T \bar{y}_j^{(k+1)} &= \bar{d}_j^{(k+1)}, \quad \bar{y}_j^{(k+1)} = L^{-1} \bar{d}_j^{(k+1)}, \quad \forall j \in [1 : t] \text{ (пряма прогонка),} \\ \bar{u}_j^{(k+1)} &= L^{-T} \bar{y}_j^{(k+1)}, \quad \forall j \in [1 : t] \text{ (зворотна прогонка).} \end{aligned}$$

Розклад $D = L \cdot L^T$ здійснюється до початку ітераційного процесу. Якщо матриця A є матрицею еліптичного різницевого рівняння для задачі (9), (10), то множники Холецького розкладу діагональних симетричних матриць D_i будуть, у загальному, різними. Якщо матриця S додатно визначена, але не симетрична (задача 11), (12)), то необхідно виконати LU -розклад.

Значимо, що крім послідовного смугового впорядкування вузлів сіткової матриці, можна задавати шахове (чорно-біле) смугове впорядкування.

Розклад Холецького додатно визначеної стрічкової симетричної матриці D з $2m+1$ -єю діагоналлю. При розкладі діагональних блоків D_i методом Холецького $D_i = L_i \cdot L_i^T$, послідовне обчислення рядків матриці L_i вимагає знаходження лише $m+1$ елементів у кожному рядку, затрати на обчислення яких становлять не більше $\frac{m(m+1)}{2}$ арифметичних операцій. Тому розклад Холецького, який можна виконувати до початку ітераційного процесу, є швидким і має мінімальне накопичення обчислювальних похибок.

Точність наближення матриці A різницевого рівняння еліптичного типу матрицею S . Нехай $[N_1 \times N_2]$ — розмірність сіткової матриці C різницевого еліптичного рівняння при дискретизації диференціального рівняння (7) (або (9), (10)) на шаблоні «хрест». І нехай вузли сіткової матриці C упорядковані по смугам шириною m . Тоді матриця $A \in M_n$, $n = N_1 \cdot N_2$ апроксимується матрицею S так, що

$p = \left(N_1 \cdot \left(1 - \frac{2}{m} \right) + 2 \right) N_2$ рядків (стовпців) матриці A збігаються з рядками (стовпцями) матриці S , а решта рядків A відрізняються лише одним не нульовим елементом від рядків (стовпців) матриці S . Матриця $W = I - S^{-1}A$ матиме $\left(N_1 \cdot \left(1 - \frac{2}{m} \right) + 2 \right) N_2$ нульових власних значень, що є необхідною умовою прискорення швидкості збіжності комбінованого методу. З формули $p = \left(N_1 \cdot \left(1 - \frac{2}{m} \right) + 2 \right) N_2$ випливає, що для $m \geq 4$ число $p > \frac{N_1 N_2}{2}$ (більше половини розмірності матриці A і не залежить від того, чи буде сіткова матриця квадратною, чи прямокутною, чи довільної форми вміщеної у прямокутник, а також не залежить від того, для якого з рівнянь (7), (9), (11) виконується дискретизація на шаблоні «хрест»).

Висновки. При смуговому поперечному впорядкуванні змінних діагональна матриця $S = \sum_{i=1}^{N/n} \oplus D_i$ є найкращим наближенням до матриці A , порівняно з, широко дослідженими способами впорядкування змінних, природним (рис. 2) та чорно-білим (шаховим) (рис. 3, 4).

Метод (6) з смуговим упорядкуванням змінних, порівняно з відомими методами розв'язування різницевих еліптичних рівнянь, має такі переваги:

- процедура (6) прискорює збіжність послідовності наближень до розв'язку двомірного різницевого еліптичного рівняння, оскільки неявний переобумовлювач — блочно-діагональна матриця S з високою точністю наближає матрицю A ;
- алгоритм (6) швидко поширює інформацію на всі вузли сітки за N/m кроків, $m \geq 3$;
- алгоритм (6) швидко уточнює наближення $\vec{x}^{(k+1)}$, оскільки розклад $L_i \cdot L_i^T$ матриці D_i здійснюється до початку ітераційного процесу і обробляє розріджену стрічкову матрицю з півшириною $m+1$;
- алгоритм (6) не залежить від крайових умов Діріхле;
- алгоритм (6) легко адаптується до області Ω_0 зі складним профілем, шляхом вміщення в область простої структури Ω і присвоєнням розв'язку на доповненні $C_{\Omega \setminus \Omega_0}$ фіксованого значення (наприклад, нульового);

- декомпозиція вузлів сіткової матриці при поперечно-смуговому впорядкуванні максимально використовує інформацію про всі внутрішні вузли смуги і граничні умови, що відображає фундаментальну основу еліптичних рівнянь [3; 4];
- алгоритм розв'язування різницевих еліптичних рівнянь великих розмірностей можна ефективно реалізувати на паралельних обчислювачах, досить одночасно обробляти смуги сіткової матриці зверху-вниз (від початкової смуги до середньої) і знизу-вгору (від кінцевої смуги до середньої), зліва-направо (від вертикальної лівої смуги до середньої), справа-наліво (від вертикальної правої до середньої).

Узагальнимо метод (6) на розв'язування тривимірного рівняння Пуассона. Нехай розв'язується задача Діріхле для рівняння Пуассона на прямокутному паралелепіпеді з розмірністю сіткової матриці $N \times M \times K$. Виділимо з тримірної сіткової матриці паралелепіпед розмірності $[m \times m \times K]$ і виконаємо упорядкування вздовж осі OZ . Таку комірку скорочено будемо називати (i, j) — блоком або шаблоном $[i \times j]$.

Легко довести, що стрічкова матриця S збігається з матрицею A для більшої половини рядків (стовбців), якщо блоки мають розмірність $[m \times m] = [8 \times 8]$ (матриця S стане 129-ти діагональною). Більш раціональним способом упорядкування сіткової матриці у просторах \mathbb{R}^n , $n \geq 3$, є кольорове упорядкування [5].

Результати та перспективи подальшого дослідження.

1. Для розв'язання еліптичного різницевого рівняння розроблений комбінований ітераційний метод, який використовує перетворення структури матриці рівняння і забезпечує щоб стрічкова складова S матриці A мала мінімальну ширину і апроксимувала A з високою точністю.
2. Розроблені алгоритми є швидкозбіжними, оскільки використовують неявний переобумовлювач — матрицю S .
3. Результати, отримані для задач еліптичного типу у просторі \mathbb{R}^2 , можуть бути застосовані для наближеного розв'язування рівнянь параболічного і гіперболічного типів.

Список використаних джерел:

1. Хейгеман Л. Прикладные итерационные методы / Л. Хейгеман, Д. Янг ; пер. с англ. — М. : Мир, 1986. — 448 с.
2. Деммель Дж. Вычислительная линейная алгебра / Дж. Деммель. — М. : Мир, 2001. — 429 с.
3. Патанкар С. Численные методы решения задач теплообмена и динамики жидкости / С. Патанкар. — М. : Энергоатомиздат, 1984. — 125 с.

4. Зверев В. Г. Модифицированный полилинейный метод решения разностных эллиптических уравнений / В. Г. Зверев // ЖВМ и МФ. — 1998. — Т. 38, № 9. — С. 1553–1562.
5. Абрамчук В. С. Итерационные методы направленного поиска решения систем $Ax = f$ с сингулярно-естественным упорядочением переменных / В. С. Абрамчук // Доп. НАН України. — 1996. — № 8. — С. 4–8.

A method of solving difference equations $A\bar{x} = \bar{b}$, $A = H + S + V$ that arise in discretization of two-dimensional elliptic boundary value problems. Solution algorithm brings together an iterative process with direct methods of solving equations $S_i\bar{x}_i = d_i$, $i = N/m$, where S_i is $2m+1$ band-diagonal matrix that approaches A with high precision and has a minimum width, N — number of rows of the matrix A .

Key words: *elliptic difference equation, transform the structure of the matrix, Cholesky factorization.*

Отримано: 20.02.2014

УДК 517.97

С. М. Бак, канд. фіз.-мат. наук

Вінницький державний педагогічний університет
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

ІСНУВАННЯ ДОЗВУКОВИХ ПЕРІОДИЧНИХ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМІ НЕЛІНІЙНО ЗВ'ЯЗАНИХ НЕЛІНІЙНИХ ОСЦИЛЯТОРІВ НА ДВОВИМІРНІЙ ГРАТЦІ

Стаття присвячена вивченню нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь, яка описує нескінченну систему нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці. Одержано результат про існування дозвуків періодичних біжучих хвиль для таких систем.

Ключові слова: *нелінійні осцилятори, двовимірна ґратка, дозвуків періодичні біжучі хвилі.*

Вступ. У цій статті вивчаються рівняння, які описують динаміку нескінченної системи нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на цілочисловій двовимірній ґратці. Нехай $q_{n,m}(t)$ — узагальнена координата (n, m) -го осцилятора в момент часу t . Передбачається, що кожний осцилятор нелінійно взаємодіє з чотирма своїми найближчими сусідами. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = U'(q_{n+1,m} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n-1,m}) + U'(q_{n,m+1} - q_{n,m}) - U'(q_{n,m} - q_{n,m-1}) - V'(q_{n,m}), \quad (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

Рівняння (1) представляє собою нескінченну систему звичайних диференціальних рівнянь, причому при $V(r) \equiv 0$ (1) є двовимірним аналогом системи Фермі-Пасти-Улама, а при $V(r) = K(1 - \cos r)$ — дискретним рівнянням \sin -Гордона на двовимірній ґратці.

Важливим класом розв'язків для таких систем є біжучі хвилі. Досить детальні результати про біжучі хвилі в ланцюгах Фермі-Пасти-Улама можна знайти в працях О. Панкова, зокрема в [10] найбільш повний огляд результатів. У статті [3] одержано умови існування періодичних біжучих хвиль в ланцюгах Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. В той же час для ланцюгів осциляторів відомі декілька праць, зокрема, [8], результати якої отримано методами теорії біфуркацій, а також [1; 5], в яких отримано умови існування періодичних та відокремлених біжучих хвиль за допомогою методу критичних точок. У статтях [2; 6; 7] вивчалися біжучі хвилі для систем лінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірних ґратках. Зокрема, в [6] розглядалась система із непарною 2π -періодичною нелінійністю. А в [7] взагалі розглядалися лінійні осцилятори. У статті [2] одержано умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль. У статті [4] одержано результат про існування періодичних біжучих хвиль для дискретного рівняння \sin -Гордона на двовимірній ґратці.

Метою статті є одержання умов існування дозвукових періодичних біжучих хвиль для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь, яка описує нескінченну систему нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці.

Постановка задачі. Для профілю біжучої хвилі $u(s)$, де $s = n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct$, рівняння (1) набуде вигляду

$$c^2 u''(s) = U'(u(s + \cos \varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s - \cos \varphi)) + U'(u(s + \sin \varphi) - u(s)) - U'(u(s) - u(s - \sin \varphi)) - V'(u(s)). \quad (2)$$

Значимо, що в рівняння (2) швидкість c входить тільки в квадраті. Звідси випливає, що якщо функція $u(s)$ задовольняє рівняння (2), то існує дві біжучі хвилі з даним профілем та швидкостями $\pm c$.

Будемо розглядати випадок періодичних біжучих хвиль, для знаходження профілю яких достатньо знайти розв'язок рівняння (2), який задовольняє умову

$$u(s + 2k) = u(s), \quad s \in \mathbb{R}, \quad k > 0. \quad (3)$$

Всюди далі під розв'язком рівняння (2) розуміється функція $u(s)$ класу $C^2(\mathbb{R})$, яка задовольняє рівняння (2) для всіх $s \in \mathbb{R}$.

Варіаційне формулювання задачі. Позначимо через E_k гільбертів простір $E_k = \{u \in H_{loc}^1(\mathbb{R}) : u(s+2k) = u(s)\}$ зі скалярним добутком $(u, v)_k = \int_{-k}^k (u(s)v(s) + u'(s)v'(s)) ds$.

На просторі E_k означимо оператори

$$(Au)(s) := u(s + \cos \varphi) - u(s) = \int_s^{s+\cos \varphi} u'(\tau) d\tau,$$

$$(Bu)(s) := u(s + \sin \varphi) - u(s) = \int_s^{s+\sin \varphi} u'(\tau) d\tau.$$

Тоді правильне таке твердження (див. [3, с. 77]).

Лема 1. Оператори A та B є обмеженими лінійними операторами, що задовольняють нерівності

$$\|Au\|_{L^2(-k, k)} \leq |\cos \varphi| \cdot \|u'\|_{L^2(-k, k)}, \quad \|Bu\|_{L^2(-k, k)} \leq |\sin \varphi| \cdot \|u'\|_{L^2(-k, k)}.$$

Всюди далі розглядаються потенціали $U(r)$ і $V(r)$ вигляду:

$$(i') \quad U(r) = \frac{c_0^2}{2} r^2 + f(r), \quad V(r) = -\frac{a^2}{2} r^2 + g(r), \quad \text{де } c_0 \geq 0, \quad a > 0.$$

Також припускається, що неквадратична частина кожного з цих потенціалів $h \in \{f; g\}$ задовольняє умови:

$$(ii') \quad h(0) = h'(0) = 0 \quad \text{і} \quad h'(r) = o(r) \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0;$$

$$(iii^+) \quad \text{існують } r_0 > 0 \quad \text{і} \quad \mu > 2 \quad \text{такі, що } h(r_0) > 0 \quad \text{і} \quad \text{для } r \geq 0$$

$$0 \leq \mu h(r) \leq rh'(r);$$

або

$$(iii^-) \quad \text{існують } r_0 > 0 \quad \text{і} \quad \mu > 2 \quad \text{такі, що } h(r_0) > 0 \quad \text{і} \quad \text{для } r \leq 0$$

$$0 \leq \mu h(r) \leq rh'(r).$$

Неважко переконатися в тому, що з цих умов випливає існування сталих $d > 0$ і $d_0 \geq 0$ таких, що $h(r) \geq d|r|^\mu - d_0$.

На просторі E_k розглянемо функціонал

$$J_k(u) := \int_{-k}^k \left\{ \frac{c^2}{2} |u'(s)|^2 - U(Au(s)) - U(Bu(s)) - V(u(s)) \right\} ds.$$

Безпосереднім обчисленням одержуються наступні два твердження.

Лема 2. J_k — функціонал класу C^1 на E_k , а його похідна для будь-яких $u, h \in E_k$ виражається формулою

$$\begin{aligned} \langle J'_k(u), h \rangle = & \int_{-k}^k \{c^2 u'(s)h'(s) - U'(Au(s))Ah(s) - \\ & - U'(Bu(s))Bh(s) - V'(u(s))h(s)\} ds. \end{aligned}$$

Лема 3. Критичні точки функціоналу $J_k \in C^2$ -розв'язками рівняння (2), що задовольняють умову (3).

Основний результат. Для одержання основного результату статті знадобиться теорема про зачеплення ([10; 11]).

Нехай H — гільбертів простір, $H = Y \oplus Z$. Нехай також $\rho > r > 0$ і $z \in Z : \|z\| = r$. Позначимо

$$M = \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| \leq \rho, \lambda \leq 0\},$$

$$M_0 = \{u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\| = \rho \text{ і } \lambda \leq 0, \text{ або } \|u\| \leq \rho \text{ і } \lambda = 0\},$$

тобто M_0 — межа $M(\partial M)$. Нехай $N := \{u \in Z : \|u\| = r\}$.

Розглянемо функціонал φ на H і припустимо, що

$$\beta := \inf_{u \in N} \varphi(u) > \alpha := \sup_{u \in M_0} \varphi(u).$$

У такому випадку говорять, що функціонал φ задовольняє *геометрії зачеплення*.

Теорема 1 (про зачеплення). Нехай φ — функціонал класу C^1 на гільбертовому просторі H , що задовольняє геометрії зачеплення та умові Пале-Смейла:

(PS) якщо послідовність $u_n \in H$ така, що $\varphi'(u_n) \rightarrow 0$ і $\varphi(u_n)$ обмежена, то вона містить збіжну підпослідовність.

Нехай

$$b := \inf_{\gamma \in \Gamma} \sup_{u \in M} \varphi(\gamma(u)),$$

де $\Gamma := \{\gamma \in C(M; H) : \gamma = id \text{ на } M_0\}$. Тоді b — критичне значення φ і $\beta \leq b \leq \sup_{u \in M} \varphi(u)$.

Наступна лема доводиться аналогічно до леми 6 з [3, с. 85].

Лема 4. Нехай виконуються умови (i') , (ii') , (iii^+) , (iii^-) , тоді функціонал J_k задовольняє умову Пале-Смейла.

Лема 5. Нехай виконуються умови (i') , (ii') , (iii^+) , (iii^-) , тоді функціонал J_k задовольняє геометрії зачеплення.

Доведення. Розглянемо оператор

$$(Lu)(s) := -c^2 u''(s) + c_0^2 (Au(s) + Bu(s)) + a^2 u(s)$$

із $2k$ -періодичними умовами. Оператор L є самоспряженим в $L^2(-k; k)$, обмеженим знизу та має дискретний спектр, який накопичується біля $+\infty$, тобто нижче нуля власних чисел є скінченна кількість. Власні значення та власні функції можна обчислити. Нагадаємо, що всі власні значення λ_j із несталими власними функціями є подвійними. Позначимо через $h_j^\pm \in E_k$ лінійно незалежні пари власних функцій із власними значеннями λ_j .

Нехай Z — підпростір E_k , утворений функціями h_j^\pm з $\lambda_j > 0$ і Y — підпростір E_k , утворений функціями h_j^\pm з $\lambda_j \leq 0$ та функцією h_0 , тобто такі лінійні оболонки $Z = \mathbf{Span} \{h_j^\pm : \lambda_j > 0\}$, $Y = \mathbf{Span} \{h_0, h_j^\pm : \lambda_j \leq 0\}$. Відмітимо, що $\dim Y < \infty$. Легко перевірити, що $Y \perp Z$ і $E_k = Y \oplus Z$.

Позначимо через Q_k квадратичну частину функціоналу J_k

$$Q_k = \frac{1}{2} \int_{-k}^k \left(c^2 |u'(s)|^2 - c_0^2 |Au(s)|^2 - c_0^2 |Bu(s)|^2 + a^2 |u(s)|^2 \right) ds.$$

Легко бачити, що $Q_k(y+z) = Q_k(y) + Q_k(z)$, де $y \in Y$, $z \in Z$.

Зауважимо, що квадратична форма Q_k додатно визначена на Z , тобто $Q_k(u) \geq \alpha \|u\|_k^2$ з $\alpha > 0$.

З умов (i') , (ii') , (iii^+) , (iii^-) випливає, що для деякого $\varepsilon > 0$ існує таке $r_0 > 0$, що $|V(r)| \leq \varepsilon r^2$, при $|r| \leq r_0$. Тоді

$$J_k(u) \geq Q_k(u) - \varepsilon \int_{-k}^k |u(s)|^2 ds \geq Q_k(u) - \varepsilon \|u\|_k^2 \geq \delta \|u\|_k^2,$$

де $\delta > 0$. Отже, $J_k(u) > 0$ на $N = \{u \in Z : \|u\|_k = r\}$ з достатньо малим $r > 0$.

Зафіксуємо $z \in Z$, $\|z\|_k = 1$ та множину

$$M = \left\{ u = y + \lambda z : y \in Z, \|u\|_k \leq \rho, \lambda \leq 0 \right\}.$$

Доведемо, що $J_k(u) \leq 0$ на $M_0 = \partial M$ за умови, що ρ достатньо велике. Нагадаємо, що

$$M_0 = \left\{ u = y + \lambda z : y \in Y, \|u\|_k = \rho \text{ і } \lambda \geq 0, \text{ або } \|u\|_k \leq \rho \text{ і } \lambda = 0 \right\}.$$

Маємо

$$J_k(y + \lambda z) = Q_k(y) + \lambda^2 Q_k(z) - \int_{-k}^k \left[V(A(y + \lambda z)) + V(B(y + \lambda z)) \right] ds.$$

Оскільки існують такі константи $d > 0$, $d_0 \geq 0$, $\tilde{d} > 0$, $\tilde{d}_0 \geq 0$, що правильні нерівності

$$f(r) \geq d|r|^\mu - d_0, \quad g(r) \geq \tilde{d}|r|^\mu - \tilde{d}_0, \quad \text{де } \mu > 2,$$

то, враховуючи, що $Q_k(y) \leq 0$

$$\begin{aligned} J_k(y + \lambda z) &\leq \lambda^2 \gamma_0 + 4kd_0 + 2k\tilde{d}_0 - d \left(\|A(y + \lambda z)\|_{L^x}^\mu + \|B(y + \lambda z)\|_{L^x}^\mu \right) \leq \\ &\leq \lambda^2 \gamma_0 + 4kd_0 + 2k\tilde{d}_0 - C \|y + \lambda z\|_{L^x}^\theta, \end{aligned}$$

де $\gamma_0 = Q_k(z)$, $C > 0$. Оскільки

$$\rho^2 = \|y + \lambda z\|_k^2 = \|y\|_k^2 + \lambda^2,$$

то $\lambda^2 \leq \rho^2$. До того ж, у скінченновимірних просторах всі норми еквівалентні. Отже,

$$\|y + \lambda z\|_{L^x} \geq c \|y + \lambda z\|_k = c\rho,$$

$$J_k(y + \lambda z) \leq \gamma_0 \rho^2 + 4kd_0 + 2k\tilde{d}_0 - C\rho^\mu.$$

Оскільки $\mu > 2$, то права частина від'ємна, якщо ρ — достатньо велике. Отже, $J_k(y + \lambda z) \leq 0$. Якщо $u \in M_0$, $\|u\|_k \leq \rho$ і $\lambda = 0$, то $u = y \in Y$ і, очевидно, що $J_k(u) \leq 0$. Таким чином, функціонал J_k задовольняє геометрії зачеплення. Лему доведено.

Наступна теорема є основним результатом цієї статті:

Теорема 2. Нехай виконуються умови (i') , (ii') , (iii^+) , (iii^-) .

Тоді для будь-яких $k \geq 1$ і $c \in (0; c_0]$ рівняння (2) має розв'язок $u_k \in E_k$. Тим самим існують дві періодичні біжучі хвилі з профілем u і швидкостями $\pm c$.

Доведення. Леми 4 і 5 показують, що для функціоналу J_k виконуються всі умови теореми про зачеплення. Отже, J_k має ненульову критичну точку $u \in E_k$, яка, за лемою 3, є C^2 -розв'язком задачі (2), (3). Теорему доведено.

Висновки. Одержано теорему про існування дозвуків періодичних біжучих хвиль для нескінченної системи звичайних диференціальних рівнянь, яка описує нескінченну систему нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів, розміщених на двовимірній ґратці, який поширює результат статті [9].

Список використаних джерел:

1. Бак С. М. Біжучі хвилі в ланцюгах осциляторів / С. М. Бак // Математичні студії. — 2006. — Т. 26, № 2. — С. 140–153.
2. Бак С. Н. Бегущие волны в системах осцилляторов на двумерных решетках / С. Н. Бак, А. А. Панков // Український математичний вісник. — 2010. — Т. 7, № 2. — С. 154–175.
3. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичні студії. — 2012. — Т. 37, № 1. — С. 76–88.
4. Бак С. М. Періодичні біжучі хвилі в дискретному рівнянні \sin -Гордона на двовимірній ґратці / С. М. Бак // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : зб. наук. праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. — Вип. 9. — С. 5–10.
5. Bak S. M. Periodic traveling waves in chains of oscillators / S. M. Bak // Communications in Mathematical Analysis. — 2007. — Vol. 3, № 1. — P. 19–26.
6. Feckan M. Traveling waves in Hamiltonian systems on 2D lattices with nearest neighbour interactions / M. Feckan, V. Rothos // Nonlinearity. — 2007. — № 20. — P. 319–341.
7. Friesecke G. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice / G. Friesecke, K. Matthies // Discrete and continuous dynamical systems. — 2003. — Vol. 3, № 1 (February). — P. 105–114.
8. Ioos G. Traveling waves in a chain of coupled nonlinear oscillators / G. Ioos, K. Kirchgassner // Commun. Math. Phys. — 2000. — № 211. — P. 439–464.
9. Makita P. D. Periodic and homoclinic travelling waves in infinite lattices / P. D. Makita // Nonlinear Analysis. — 2011. — № 74. — P. 2071–2086.
10. Pankov A. Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices / A. Pankov. — London ; Singapore : Imperial College Press, 2005. — 196 p.
11. Willem M. Minimax theorems / M. Willem. — Boston : Birkhuser, 1996. — 162 p.

The article deals with infinite systems of differential equations that describe infinite system of nonlinear coupled nonlinear oscillators on 2D-lattice. It is obtained result on existence of subsonic periodic travelling waves.

Key words: *nonlinear oscillators, 2D-lattice, subsonic periodic travelling waves.*

Отримано: 24.03.2014

УДК 519.632:621.3.011.222

А. Я. Бомба, д-р техн. наук, професор,

Л. Л. Крока, аспірант

Рівненський державний гуманітарний університет, м. Рівне

ЧИСЛОВІ МЕТОДИ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛІЗУ ПРИ РОЗВ'ЯЗАННІ ОДНОГО КЛАСУ НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИЧНИХ ЗАДАЧ ЗА УМОВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ПАРАМЕТРІВ

На основі числових методів комплексного аналізу запропоновано підхід до розв'язання двовимірних обернених модельних задач для нелінійних (квазілінійних) еліптичних диференціальних рівнянь в областях, обмежених лініями течії та еквіпотенціальними лініями, за умов ідентифікації коефіцієнта, що характеризує провідність середовища. Відповідний алгоритм побудовано для випадку, коли шуканий коефіцієнт в області комплексного потенціалу допускає розділення змінних.

Ключові слова: *обернені коефіцієнтні задачі, ідентифікація, стаціонарні процеси, еліптичні диференціальні рівняння, квазіконформні відображення.*

Вступ. Задачі ідентифікації виникають на етапі адаптації математичної моделі об'єкту, що вивчається, за відомими даними або у випадку діагностики стану цього об'єкту на основі спостережень за динамікою зміни значень його основних параметрів [1–3]. Помічено, що найкращі результати щодо ідентифікації параметрів нелінійних математичних моделей дають ітераційні підходи, які ґрунтуються на почерговому розв'язанні задач аналізу (прямої) та синтезу (оберненої) [4]. Зважаючи на особливості реалізації алгоритмів чисельного розв'язання крайових задач на квазіконформні відображення областей різної геометричної конфігурації, обмежених лініями течії та еквікватипотенціальними лініями [5–7], перспективними є застосування відповідних числових методів комплексного аналізу до розв'язання обернених коефіцієнтних задач. Тут і далі термін «обернена задача» по контексту розумітиметься в одному із двох значень — або як обернена коефіцієнтна задача, яка полягає в ідентифікації параметрів математичних моделей, або як обернена задача на квазіконформне відображення, суть якої у побудові квазіконформного відображення взаємо оберненого з даним.

У цій роботі ідеї числових методів комплексного аналізу [5–6] поширено на випадок ідентифікації коефіцієнтів у крайових задачах при вивченні стаціонарних процесів (наприклад, ідентифікація коефіцієнта фільтрації гідрогеологічної моделі чи коефіцієнта електричної провідності на основі експериментальних даних електротомографії тощо). Розроблено алгоритм ідентифікації у випадку, коли шуканий коефіцієнт в області комплексного потенціалу допускає розділення змінних.

Постановка задачі. Розглядається крайова задача, що описується еліптичним диференціальним рівнянням дивергентного типу другого порядку (математична модель процесів, що підпорядковуються законам Ома чи Дарсі):

$$\operatorname{div}(\kappa \cdot \operatorname{grad} \varphi) = 0, (x, y) \in G_z; \quad (1)$$

$$\varphi(M) = \varphi_*, \int_{AM} \kappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl = \tilde{\psi}(M), M \in AB; \quad \varphi(T) = \varphi^*, T \in CD; \quad (2)$$

$$\frac{\partial \varphi(P)}{\partial n} = 0, \quad \varphi(P) = \tilde{\varphi}(P), P \in AD; \quad (3)$$

$$\frac{\partial \varphi(N)}{\partial n} = 0, N \in BC; \quad \int_{AB} -v_y dx + v_x dy = Q, \quad (4)$$

де G_z — однозв'язна криволінійна область, обмежена кусково-гладкою замкненою кривою $\partial G_z = \{(x, y) : x = \hat{x}(\tau), y = \hat{y}(\tau), \tau \in [\tau_*; \tau^*]\} = AB \cup BC \cup CD \cup DA$ (див. рис. 1, а)-в), $\hat{x}(\tau)$, $\hat{y}(\tau)$ — визначені оборотні функції, точки A, B, C, D визначаються відповідно параметрами $\tau_A, \tau_B, \tau_C, \tau_D, \tau_* = \tau_A \leq \tau_D \leq \tau_C \leq \tau_B \leq \tau^* = \tau_A = \tau^*$, $\hat{x}(\tau_A) = \hat{x}(\tau_A^*)$, $\hat{y}(\tau_A) = \hat{y}(\tau_A^*)$; κ — коефіцієнт (характеризує провідність середовища), значення якого необхідно ідентифікувати в процесі розв'язання задачі (1)–(4); $\varphi = \varphi(x, y)$ — функція квазіпотенціалу швидкості $\vec{v} = (v_x, v_y) = \kappa \cdot \operatorname{grad} \varphi$ (стаціонарного векторного поля в G_z); \vec{n} — одиничний вектор біжучої нормалі до відповідної кривої; Q — потік векторного поля; M, P, T, N — біжучі точки відповідних ділянок ∂G_z ; $\tilde{\varphi}(P) = \tilde{\varphi}(x, y)$, $\tilde{\psi}(M) = \tilde{\psi}(x, y)$ — деякі неперервні монотонні функції

$$\left(\varphi_* \leq \tilde{\varphi}(x, y) \leq \varphi^*, \quad \tilde{\varphi}(\hat{x}(\tau_A), \hat{y}(\tau_A)) = \varphi_*, \quad \tilde{\varphi}(\hat{x}(\tau_D), \hat{y}(\tau_D)) = \varphi^* \right);$$

$$0 \leq \tilde{\psi}(x, y) \leq Q, \quad \tilde{\psi}(\hat{x}(\tau_A), \hat{y}(\tau_A)) = 0, \quad \tilde{\psi}(\hat{x}(\tau_B), \hat{y}(\tau_B)) = Q.$$

Зауважимо, що розв'язання задачі ідентифікації є досить складною проблемою і передбачає використання, окрім умов (2)–(4), додаткової інформації про невідомі функції φ , κ . Так у випадку довільної залежності κ від своїх аргументів, враховуючи необхідність забезпечення коректності постановки крайової задачі для еліптичних рівнянь, необхідно використовувати певного роду сукупність крайових задач (1)–(4) (всеможливі положення точок A, B, C, D на ∂G_z та відповідно задання низки умов типу (2)–(4)). У цій роботі передбачається, що шуканий коефіцієнт в області комплексного потенціалу допус-

кає розділення змінних — $\kappa = \kappa(\varphi, \psi) = \kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi)$, $\kappa_1 > 0, \kappa_2 > 0$
 ((φ, ψ) — координати області комплексного потенціалу;
 $\psi = \psi(x, y)$ — функція течії, комплексно спряжена до φ ,

$$\psi(T) = \int_{MT} \kappa \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial n} dl, \quad M \in AD, \quad T \in G_z.$$

Метод комплексного аналізу. Враховуючи переваги застосування квазіконформних відображень до розв'язання крайових задач математичної фізики (зокрема, спрощення процедур побудови сіткової області — рівномірного розбиття фізичної області лініями рівня та лініями течії), перейдемо від (1)–(4) до наступної більш загальної задачі на квазіконформне відображення області G_z на G_ω (за умови ідентифікації коефіцієнта $\kappa = \kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi)$) згідно описаних в [5–6] алгоритмів:

$$\kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad (6)$$

$$\varphi(P) = \varphi_*, \quad \psi(P) = \tilde{\psi}(P), \quad P \in AB;$$

$$\psi(M) = 0, \quad \varphi(M) = \tilde{\varphi}(M), \quad M \in AD;$$

$$\varphi|_{CD} = \varphi^*; \quad \psi|_{BC} = Q. \quad (7)$$

Тут $G_\omega = \{(\varphi, \psi) : \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*, \quad 0 \leq \psi \leq Q\}$.

Зважаючи на особливості алгоритмів розв'язування таких крайових задач [5–7], скористаємось ідеєю переходу від задачі (6)–(7) до оберненої крайової задачі на квазіконформне відображення $z = z(\omega) = x(\varphi, \psi) + iy(\varphi, \psi)$ області G_ω на G_z , яка в свою чергу зводиться до відшукування функцій $x = x(\varphi, \psi)$, $y = y(\varphi, \psi)$, $\kappa(\varphi, \psi) = \kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi)$, котрі задовольняють умовам [6]:

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi)} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi) \cdot \frac{\partial x}{\partial \psi} \right) = 0, \right. \quad (8)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(\frac{1}{\kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi)} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} \right) + \frac{\partial}{\partial \psi} \left(\kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi) \cdot \frac{\partial y}{\partial \psi} \right) = 0, \quad \forall (\varphi, \psi) \in G_\omega;$$

$$x(\varphi_*, \psi) = \hat{x} \left(\tilde{\psi}^{-1}(\psi) \right), \quad y(\varphi_*, \psi) = \hat{y} \left(\tilde{\psi}^{-1}(\psi) \right), \quad 0 \leq \psi \leq Q; \quad (9)$$

$$x(\varphi, 0) = \hat{x} \left(\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi) \right), \quad y(\varphi, 0) = \hat{y} \left(\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi) \right), \quad \varphi_* \leq \varphi \leq \varphi^*;$$

$$\begin{cases} x(\varphi^*, \psi) = \hat{x}(\tau), \quad y(\varphi^*, \psi) = \hat{y}(\tau), \quad \tau \in [\tau_D; \tau_C]; \\ x(\varphi, Q) = \hat{x}(\tau), \quad y(\varphi, Q) = \hat{y}(\tau), \quad \tau \in [\tau_C; \tau_B]; \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{cases} \hat{x}'(\tau) \frac{\partial y}{\partial \varphi} - \hat{y}'(\tau) \frac{\partial x}{\partial \varphi} = 0, & \tau \in [\tau_A; \tau_B] \cup [\tau_C; \tau_D], \\ \hat{x}'(\tau) \frac{\partial y}{\partial \psi} - \hat{y}'(\tau) \frac{\partial x}{\partial \psi} = 0, & \tau \in [\tau_B; \tau_C] \cup [\tau_D; \tau_A^*]. \end{cases} \quad (11)$$

Тут $\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi)$, $\tilde{\psi}^{-1}(\psi)$ — неперервні функції, обернені відповідно до $\varphi = \tilde{\varphi}(\hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau)) = \tilde{\varphi}(\tau)$, $\tau \in [\tau_A; \tau_D]$, $\psi = \tilde{\psi}(\hat{x}(\tau), \hat{y}(\tau)) = \tilde{\psi}(\tau)$, $\tau \in [\tau_B; \tau_A^*]$.

Різнцеві аналоги рівнянь (8) (виконання яких вимагаємо лише у внутрішності області G_ω) та умов (9)–(11) у відповідній G_ω сіткової області $G_\omega^\gamma = \left\{ (\varphi_i, \psi_j) : \varphi_i = \varphi_* + \Delta\varphi \cdot i, \quad i = \overline{0, m+1}; \quad \psi_j = \Delta\psi \cdot j, \quad j = \overline{0, n+1}; \quad \Delta\varphi = \frac{\varphi^* - \varphi_*}{m+1}, \quad \Delta\psi = \frac{Q}{n+1}, \quad \gamma = \frac{\Delta\varphi}{\Delta\psi}, \quad m, n \in \mathbb{N} \right\}$ запишемо (у випадку неперервної залежності шуканого коефіцієнта $\kappa(\varphi, \psi)$ від своїх аргументів) у наступному вигляді:

$$\begin{cases} x_{i+1,j} + x_{i-1,j} - 2(1 + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2) x_{i,j} + \frac{\Delta\varphi}{2} \left(\gamma \kappa_{i,j} \kappa_{\psi' i,j} (x_{i,j+1} - x_{i,j-1}) - \frac{\kappa_{\varphi' i,j}}{\kappa_{i,j}} (x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2 (x_{i,j-1} + x_{i,j+1}) \right) = 0, & y_{i+1,j} + y_{i-1,j} - \\ - 2(1 + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2) y_{i,j} + \gamma^2 \kappa_{i,j}^2 (y_{i,j-1} + y_{i,j+1}) + \frac{\Delta\varphi}{2} \left(\gamma \kappa_{i,j} \kappa_{\psi' i,j} (y_{i,j+1} - y_{i,j-1}) - \frac{\kappa_{\varphi' i,j}}{\kappa_{i,j}} (y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) \right) = 0, & i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}; \end{cases} \quad (12)$$

$$\begin{cases} x_{0,j} = \hat{x}(\tilde{\varphi}^{-1}(\psi_j)), & y_{0,j} = \hat{y}(\tilde{\psi}^{-1}(\psi_j)), \\ x_{i,0} = \hat{x}(\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi_i)), & y_{i,0} = \hat{y}(\tilde{\varphi}^{-1}(\varphi_i)); \end{cases} \quad (13)$$

$$\begin{cases} \hat{x}'(\tau_{(CD)_j}) (y_{m,j} - \hat{y}(\tau_{(CD)_j})) - \hat{y}'(\tau_{(CD)_j}) (x_{m,j} - \hat{x}(\tau_{(CD)_j})) = 0, \\ \hat{x}'(\tau_{(BC)_i}) (y_{i,n} - \hat{y}(\tau_{(BC)_i})) - \hat{y}'(\tau_{(BC)_i}) (x_{i,n} - \hat{x}(\tau_{(BC)_i})) = 0, \\ x_{m+1,j} = \hat{x}(\tau_{(CD)_j}), \quad y_{m+1,j} = \hat{y}(\tau_{(CD)_j}), \quad \tau_{(CD)_j} \in [\tau_D; \tau_C], \\ x_{i,n+1} = \hat{x}(\tau_{(BC)_i}), \quad y_{i,n+1} = \hat{y}(\tau_{(BC)_i}), \quad \tau_{(BC)_i} \in [\tau_C; \tau_B], \end{cases} \quad (14)$$

де γ — квазіконформний інваріант; $x_{i,j} = x(\varphi_i, \psi_j)$, $y_{i,j} = y(\varphi_i, \psi_j)$,

$$j = \overline{0, n+1}, i = \overline{0, m+1}; \kappa_{i,j\pm 1/2} = \kappa_1 \left(\frac{\varphi_{i,j\pm 1} + \varphi_{i,j}}{2} \right) \cdot \kappa_2 \left(\frac{\psi_{i,j\pm 1} + \psi_{i,j}}{2} \right),$$

$$\kappa_{i\pm 1/2,j} = \kappa_1 \left(\frac{\kappa_{i\pm 1,j} + \varphi_{i,j}}{2} \right) \cdot \kappa_2 \left(\frac{\psi_{i\pm 1,j} + \psi_{i,j}}{2} \right).$$

Формулу для уточнення значень коефіцієнта κ одержимо на підставі «квазіконформної подібності в малому» відповідних прямокутників двох областей G_z , G_ω , згідно якої:

$$\kappa_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\gamma} \frac{a_{i,j} + a_{i,j+1}}{b_{i,j} + b_{i+1,j}}, \quad (15)$$

де

$$a_{i,j} = \sqrt{(x_{i+1,j} - x_{i,j})^2 + (y_{i+1,j} - y_{i,j})^2},$$

$$b_{i,j} = \sqrt{(x_{i,j+1} - x_{i,j})^2 + (y_{i,j+1} - y_{i,j})^2}.$$

З аналізу накладених умов на шуканий коефіцієнт κ помітимо можливість його представлення у внутрішності G через відповідні значення вздовж приграничних ділянок. Різницевий аналог такої залежності згідно обраних позначень запишемо у вигляді:

$$\kappa_{i+\frac{1}{2},j+\frac{1}{2}} = \frac{\kappa_{i+\frac{1}{2},0} \cdot \kappa_{0,j+\frac{1}{2}}}{\kappa_{0,0}}. \quad (16)$$

Зауважимо, що за відсутності інформації про неперервну залежність шуканого коефіцієнта $\kappa(\varphi, \psi)$ від аргументів, використання різницевих рівнянь (12) не є коректним, в такому випадку для побудови різницевого аналогу умов (8) доцільно скористатися інтегроінтерполяційним методом, згідно якого:

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma^2 (\kappa_{i,j+1/2} (x_{i,j+1} - x_{i,j}) - \kappa_{i,j-1/2} (x_{i,j} - x_{i,j-1})) + \frac{x_{i+1,j} - x_{i,j}}{\kappa_{i+1/2,j}} - \\ - \frac{x_{i,j} - x_{i-1,j}}{\kappa_{i-1/2,j}} = 0, \quad \gamma^2 (\kappa_{i,j+1/2} (y_{i,j+1} - y_{i,j}) - \kappa_{i,j-1/2} \times \\ \times (y_{i,j} - y_{i,j-1})) + \frac{y_{i+1,j} - y_{i,j}}{\kappa_{i+1/2,j}} - \frac{y_{i,j} - y_{i-1,j}}{\kappa_{i-1/2,j}} = 0, \quad i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}. \end{array} \right. \quad (17)$$

Алгоритм розв'язання різницевої задачі (12)–(16) (чи задачі (13)–(17)) побудуємо з використанням ідей блочної ітерації та почергової параметризації шуканих величин та функції аналогічно алгори-

тмам розв'язування нелінійних обернених крайових задач теорії фільтрації на квазіконформні відображення, запропонованим в [5–7], з такими відмінностями:

- на початковому етапі згідно умови (13) для ділянок AB, AD знаходимо координати граничних вузлів, які на наступних ітераціях уточнюються уже не будуть; початкове наближення граничних вузлів для ділянок BC, CD знайдемо, наприклад, зі співвідношень

$$(14) \text{ та } \tau_{(CD)_j} = j \cdot \frac{\tau_C - \tau_D}{n+1}, \quad \tau_{(BC)_i} = i \cdot \frac{\tau_B - \tau_C}{m+1}, \quad j = \overline{1, n}, \quad i = \overline{1, m};$$

- значення потоку Q задається, а значення квазіконформного інваріанту γ однозначно визначається з вхідних умов і не змінюються в процесі розв'язання задачі;
- на основі чергового ітераційного уточнення коефіцієнта $\kappa_{\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$, $\kappa_{i+\frac{1}{2}, \frac{1}{2}}$, $j = \overline{0, n}$, $i = \overline{0, m}$, вздовж примезових ділянок AB, AD згідно формули (15) обчислюватимемо відповідні наближення значень $\kappa_{i+\frac{1}{2}, j+\frac{1}{2}}$, $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$, у внутрішніх точках області G_z згідно формули (16).

Для зупинки ітераційного процесу згідно [6–7] можуть бути використані такі умови:

$$S^{(k)} \leq \varepsilon, \quad \delta \leq \delta_*,$$

$$\text{де } S^{(k)} = \max_{i,j} \sqrt{(x_{i,j}^{(k)} - x_{i,j}^{(k-1)})^2 + (y_{i,j}^{(k)} - y_{i,j}^{(k-1)})^2}, \quad \delta = \sqrt{\delta_1^2 + \delta_2^2},$$

$$\begin{cases} \delta_1 = \max_{i,j=1}^{n-1, m-1} |(x_{i+1,j} - x_{i-1,j}) - \gamma_l^p (y_{i,j+1} - y_{i,j-1})|, \quad l = \overline{1, 4}, \\ \delta_2 = \max_{i,j=1}^{n-1, m-1} |(y_{i+1,j} - y_{i-1,j}) + \gamma_l^p (x_{i,j+1} - x_{i,j-1})|, \quad p = \overline{1, 2}. \end{cases}$$

Як і в [5–7], **обґрунтування** побудованого алгоритму, що базується на почерговому «замороженні» шуканих коефіцієнта, внутрішніх та граничних вузлів криволінійної області, проводиться з використанням ідей методу блочної ітерації (див., напр., [8]) з виділенням зон порушення умов ортогональності розрахованої динамічної сітки (у випадку, коли криві AB, BC, CD, DA границі області не є ортогональними в точках перетину).

Запропонований підхід до розв'язання задачі ідентифікації для еліптичних диференціальних рівнянь дивергентного типу другого порядку апробовано на серії тестових числових експериментів (математичних моделях процесів фільтрації в пористих середовищах [5–

7)), шляхом розв'язування двох задач: задачі на побудову гідродинамічної сітки для відомого розподілу коефіцієнта провідності $\kappa(\varphi, \psi)$ (згідно алгоритмів, запропонованих у роботах [5]) та задачі ідентифікації (на основі розробленого алгоритму) з використанням в якості вхідних даних для задачі (1)–(4) функцій та величин, отриманих в результаті розв'язання попередньої задачі.

Реконструйовані гідродинамічні сітки за результатами числових розрахунків, проведених за умов ідентифікації коефіцієнта κ , представлено на рис. 1 (рис. 1 а)–в) — власне гідродинамічні сітки фізичних областей, рис. 1 г) — відповідна область комплексного квазіпотенціалу

для $\varphi_* = 2$ $\varphi^* = 5$, $m = 50$, $n = 50$, $\kappa(\varphi, \psi) = \left(0.5 + \frac{\varphi - 2}{40}\right) \left(1 + \frac{\psi}{40}\right)$ (для прямої задачі).

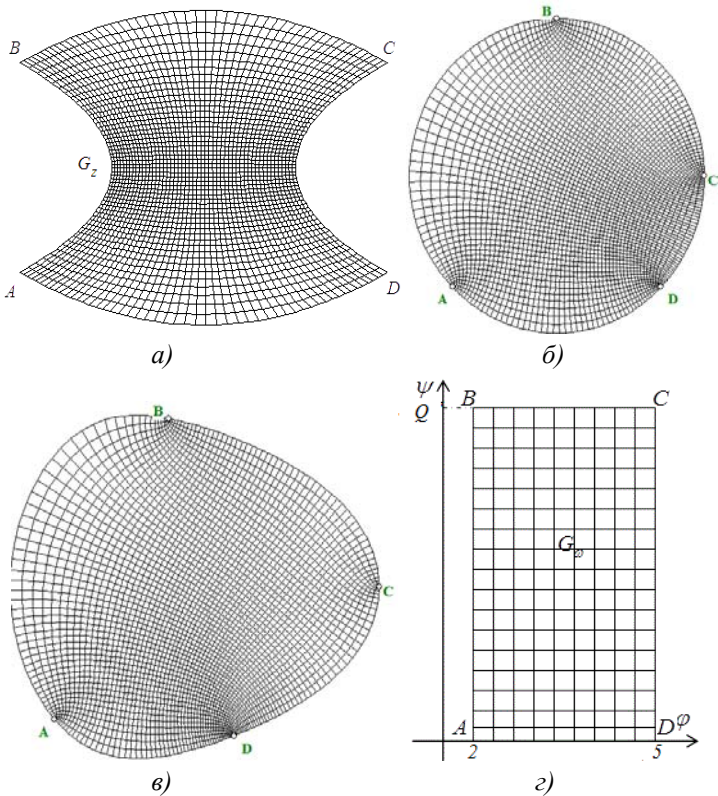


Рис. 1. Реконструйовані гідродинамічні сітки для різних фізичних областей а)–в) та відповідна їм область квазікомплексного потенціалу г)

При цьому границі фізичних областей G_z та значення параметрів τ для фіксації точок $A, B, C, D \in \partial G_z$ задавалися відповідно рис. 1 а)–в) у вигляді:

$$а) \partial G_z = \{(x, y) : \frac{y^2}{4} + x - 2 = 0, \frac{(x-3)^2}{4} + y - 3 = 0, \frac{y^2}{4} - x + 4 = 0, \frac{(x-3)^2}{4} - y - 3 = 0\}, A(1, -2), B(1, 2), C(5, 2), D(5, -2);$$

$$б) \partial G_z = \{(x, y) : x = x(\tau) = 4 \cos \tau, y = y(\tau) = 4 \sin \tau, \tau \in [0, 2\pi], \tau_A = \frac{5\pi}{4}, \tau_B = \frac{\pi}{2}, \tau_C = 0, \tau_D = \frac{7\pi}{4}\};$$

$$в) \partial G_z = \{(x, y) : y = y(\tau) = 24 \sin \tau - \frac{16.8}{(0.49 \cos^2 \tau + 0.36 \sin^2 \tau)^2},$$

$$x = x(\tau) = 28 \cos \tau + \frac{20(0.49 \cos^2 \tau - 0.36 \sin^2 \tau)}{(0.49 \cos^2 \tau + 0.36 \sin^2 \tau)^2},$$

$$\tau \in [0, 2\pi], \tau_A = \frac{5\pi}{4}, \tau_B = \frac{\pi}{2}, \tau_C = 0, \tau_D = \frac{8\pi}{5}.$$

Проведені числові розрахунки (рис.2) показують, що значення відносної похибки ідентифікованого коефіцієнта $\kappa(\varphi, \psi) = \kappa_1(\varphi) \cdot \kappa_2(\psi)$ очікувано досягає максимуму ($\approx 10\%$) в околах кутових точок A, B, C, D , де суттєво порушується і точність побудови гідродинамічних сіток.

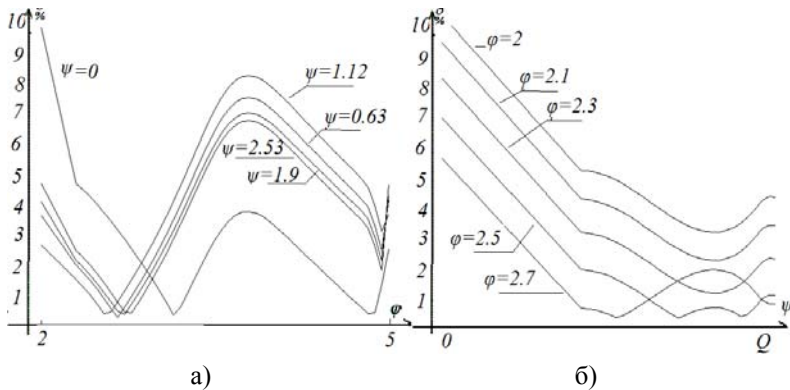


Рис. 2. Розподіл відносної похибки ідентифікованого коефіцієнта провідності вздовж ліній течії а) та еквіпотенціальних ліній б)

Висновки. Проведені дослідження підтверджують можливість і доцільність використання числових методів комплексного аналізу (квазіконформних відображень) до розв'язання двовимірних обернених модельних задач для нелінійних (квазілінійних) еліптичних диференціальних рівнянь в областях, обмежених лініями течії та екіпотенціальними лініями, за умов ідентифікації коефіцієнта, що характеризує провідність середовища (наприклад, коефіцієнтів фільтрації в гідрогеологічних моделях чи електричної провідності в модельних задачах електротомографії тощо), з цілком прийнятним для використання на практиці рівнем точності. Запропонований підхід забезпечує одночасний розрахунок сіток комплексно спряжених функцій, що є доцільним при числовому розв'язанні крайових задач математичної фізики. Безумовно, що відповідний алгоритм, який реалізовано у випадку, коли шуканий коефіцієнт в області комплексного потенціалу допускає розділення змінних, може бути покладений в основу більш загального програмного комплексу для дослідження середовищ з довільною залежністю провідності як від координат області комплексного потенціалу, так і від координат фізичної області. У перспективі також проведення регуляризації знайдених розв'язків з метою мінімізації впливу похибок у вхідних даних.

Список використаних джерел:

1. Yeh W. W-G. Review of parameter identification procedures in groundwater hydrology / W. W-G. Yeh // *The inverse problem. Water Resources Research.* — 1986. — № 22(2). — P. 95–108.
2. Vainikko E. Some numerical schemes for the identification of the filtration coefficient / E. Vainikko, G. Vainikko // *Acta et comment. univ. Tartuensis* 937. — 1992. — P. 90–102.
3. Yavorsky B. Y. Structural identification of mathematical model of images reconstruction by electrical impedance tomography / B. Y. Yavorsky, Y. B. Promyuch, G. M. Shadrina // *Proceeding sof the IV International conference «Electronics and applied physics».* 23-25 October, Kyiv, Ukraine. — 2008. — P. 85–86.
4. Сушко И. А. Сравнение классического метода решения обратной задачи импедансной томографии с методом «зон» проводимости / И. А. Сушко, А. И. Рыбин // *Вісник Національного технічного університету України «КПІ» Серія. Радіотехніка. Радіоапаратобудування.* — 2012. — № 49. — С. 166–177.
5. Методи комплексного аналізу : монографія / А. Я. Бомба, С. С. Каштан, Д. О. Пригорницький, С. В. Ярошак. — Рівне : НУВГП, 2013 — 415 с.
6. Бомба А. Я. Нелінійні математичні моделі процесів геогідродинаміки / А. Я. Бомба, В. М. Булавацький, В. В. Скопецький. — К. : Наук. думка, 2007. — 308 с.
7. Бомба А. Я. Нелінійні обернення крайових задач на квазіконформні відображення при моделюванні впливу градієнтів напору на процес фільтрації / А. Я. Бомба, С. С. Каштан // *Математичні методи та фізико-механічні поля.* — 2002. — Т. 45, № 2. — С. 49–57.

8. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.

We propose an approach to solving of two-dimensional inverse modeling problem of identifying the coefficient (the conductivities of a medium) in the nonlinear (quasilinear) elliptic differential equation in the domain between lines of flow and equipotential lines by using numerical methods the analysis of complex. The corresponding algorithm is constructed for the case where the coefficient allows separation of variables in the field of complex potential.

Key words: *inverse problem of identifying, stationary processes, elliptic differential equation, quasiconformal mappings.*

Отримано: 10.02.2014

УДК 532.543

П. С. Венгерський, канд. фіз.-мат. наук

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

ЧИСЕЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ СУМІСНОГО СТОКУ ПОВЕРХНЕВИХ І ГРУНТОВИХ ВОД З ТЕРИТОРІЇ ВОДОЗБОРУ

Для опису поверхневих потоків записано початково-крайову задачу стоку мілкої води. З урахуванням гідравлічного потоку для опису ґрунтових потоків використовується рівняння Бусинеску. З урахуванням суцільного однорідного середовища водяного потоку сформулюємо початково-крайову задачу спільного руху рідини по поверхні водозбору. Побудовані моделі апробовано на тестових прикладах, досліджується збіжність і стійкість задачі з урахуванням дії природних факторів. Розроблені програми обчислювалися за допомогою програмного пакету COMSOL.

Ключові слова: *рухомий шар рідини, мілка вода, поверхневі потоки, ґрунтова вода, н'єзометричний напір, сумісний потік, варіаційна задача, білінійні форми, метод скінченних елементів, дискретизація задачі, лінеаризація задачі, умови спряження.*

Сформулюємо задачу для опису руху схилових потоків по поверхні водозбору з урахуванням крайових та початкових умов[1–3].

1. Система рівнянь руху поверхневих потоків. Виділимо в суцільному середовищі (рідині) рухомий шар $S(t) \in R^3$ (рис. 1)

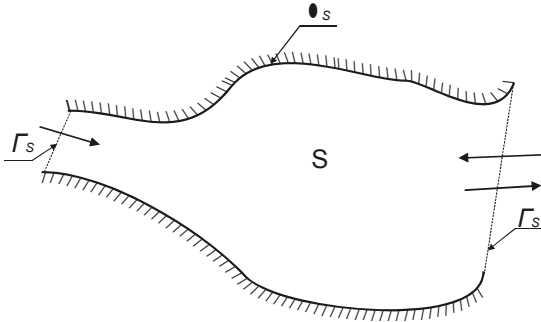


Рис. 1. Графічне зображення території водозбору

такої структури

$$S(t) := \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3, \eta(x, t) < x_3 < \xi(x, t) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t)\}.$$

Позначимо проєкції його нижньої

$$\Gamma(t) := \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 = \eta(x, t) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t)\}$$

та верхньої

$$\Lambda_s(t) := \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3 \mid x_3 = \xi(x, t) \quad \forall x = (x_1, x_2) \in \Omega(t)\}$$

основ на площину $0x_1x_2$. Решту поверхні цього шару

$$\Gamma_s(t) := \{(x_1, x_2, x_3) \in R^3, \eta(x, t) < x_3 < \xi(x, t) \quad \forall x \in \Gamma(t)\}$$

будемо називати бічною поверхнею шару $S(t)$.

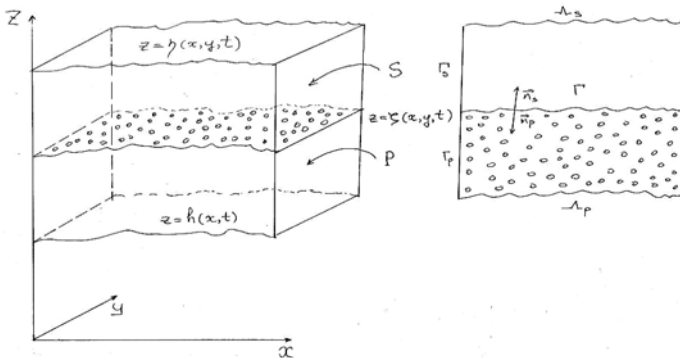


Рис. 2. Загальне зображення моделі потоків та їх поперечний розріз

Запишемо загальні рівняння руху рідини

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho u_i) + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_k}(\rho u_i u_k) - \rho f_i - \sum_{k=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = 0, \quad (1)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} &= -p_s \delta_{ij} + \tau_{ij}, \\ \tau_{ij} &= 2\mu e_{ij}, i, j = 1, 2, 3, \\ e_{ij} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^3 \frac{\partial (\rho u_k)}{\partial x_k} &= 0, \text{ в } S \times (0, T],\end{aligned}\quad (2)$$

де $\{u_i(x, t)\}_{i=1}^3$ та $p_s = p_s(x, t)$ шукані вектор швидкості частинок рідини та гідростатичний тиск відповідно, $F = \{g f_i(x)\}_{i=1}^3$ — масові сили, $\rho = \rho(x, t) > 0$, $\mu = \mu(x) > 0$, $\{e_{ij}\}_{i,j=1}^3$, $\{\sigma_{ij}\}_{i,j=1}^3$ — густина маси, коефіцієнт в'язкості, симетричні тензори швидкостей деформації та напружень рідини в точці x на момент часу t , δ_{ij} — символ Кронекера.

2. Крайові та початкові умови для поверхневих вод. На практиці досить часто використовують граничні умови більш загального вигляду. Це граничні умови змішаного типу, коли на ділянках межі області S задаються компоненти вектора швидкості та поверхневих напружень:

$$\vec{u}_i = \vec{u}_i \text{ на } \Gamma_1,$$

$$\sum_{j=1}^n \sigma_{ij} \nu_j = \hat{p}_i, \text{ на } \Gamma_2, i = 1, 2, 3,$$

де $\Gamma_1 \cup \Gamma_2 = \partial S$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \emptyset$, $\vec{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ — вектор зовнішньої одиначної нормалі до ∂S ; $\vec{\hat{p}} = (\hat{p}_1, \hat{p}_2, \hat{p}_3)$ — задана вектор-функція.

З огляду на те, що в загальному випадку частина поверхні $\xi(x, t)$ потоку є вільною поверхнею і, отже, однією з невідомих його характеристик, тоді потрібно задати ще умови для визначення її положення в просторі в кожен момент часу. Для відшукування вільної поверхні на верхній межі стоку $x_3 = \xi(x_1, x_2, t)$ використаємо кінематичну умову:

$$u_3 + R = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u_1^0 \frac{\partial \xi}{\partial x_1} + u_2^0 \frac{\partial \xi}{\partial x_2} \text{ в } S \times (0, T],$$

де R — швидкість падіння капель дощу, u_1^0 , u_2^0 — горизонтальні складові швидкості на вільній поверхні та початкову умову

$$\xi|_{t=0} = \xi^0 \text{ в } S.$$

У загальному випадку на нижній межі потоку $x_3 = \eta(x_1, x_2)$ можна вважати, що рідина може перетікати у ґрунтову масу вздовж осі x_3

$$u_3 = -I \text{ на } \eta \times [0, T],$$

де I — відома функція, яка описує швидкість потоку рідини в доквіллі. Наприклад, $I = 0$ означає, що поверхня η непрониклива для рідини; $I > 0$ — частинки рідини інфільтруються в ґрунт із заданою швидкістю; $I < 0$ — ґрунтові води підживляють поверхневий стік води своїм виходом на донну поверхню землі, що трапляється, коли тиск в ґрунтових водах перевищує напруження в рідині.

Щодо швидкості, то на нижній межі потоку, врахувавши умову прилипання, покладемо

$$u_1 = u_2 = 0.$$

3. Рівняння руху ґрунтових вод. Моделі для опису руху води в різноманітних шарах ґрунту відрізняються одна від одної в міру різноманітності, забезпеченості даними, можливостями перевірки на адекватність в реальних умовах. Для спрощення опису руху води проводиться вертикальна декомпозиція задачі — весь підземний простір на виділеній території розбивається на шари: поверхня землі, ненасичена зона, насичена зона, зона напірного руху. В кожному шарі для опису руху води використовуються моделі різної розмірності, їх розв'язки з'єднуються за допомогою граничних умов. В насиченій зоні відбуваються процеси фільтрації води, капілярного підйому, випаровування та вбирання води корінням рослин, рух ґрунтової води вздовж водопідпору, взаємодія з русловим стоком, з водою в насиченій зоні. В напірному шарі рух відбувається між двома водопідпорами. Тут можлива взаємодія з русловим стоком і вищими або нижчими водонасиченими шарами при наявності проникливого водопідпору.

Для виведення рівнянь, що описують процес фільтрації, відомі два підходи: гідродинамічний та гідравлічний.

Гідродинамічний підхід полягає в тому, що припускаємо, що фільтраційний потік підпорядковується загальному закону руху суцільного середовища. Для цього середовища записуються закони збереження маси та енергії і отримуються рівняння, що описують рух середовища. Отримані рівняння називають основними рівняннями теорії фільтрації. Основні рівняння теорії фільтрації не утворюють замкнуту систему рівнянь, тому їх, як правило, доповнюють рівнянням стану рідини.

Гідравлічний підхід до виведення рівнянь полягає в тому, що виділяється в безнапірному потоці нескінченно малий елемент, для якого записується балансове рівняння притоку та відтоку води. Висота грані виділеного об'єму (глибини потоку) співпадає з аплікатою вільної поверхні і діючим напором. Допускається, що всі лінії току, що пересікаються з однією і тією ж вертикаллю потоку, близькі до паралельних кривих. За рахунок інфільтрації з поверхні землі у виділеному об'ємі проходить приріст маси рідини, який викликає підвищення вільної по-

верхні зі збільшенням глибини потоку. Так були отримані рівняння, які носять назву рівнянь Ж. Бусинеска або рівнянь планової фільтрації. Загальним для випадків планової теорії фільтрації є нехтування вертикальною складовою швидкості фільтрації, яка може бути знайдена з рівняння нерозривності потоку у вигляді лінійної залежності від z (рідина — нестислива, середовище — недеформівне).

Рівняння, що описує процес фільтрації, отримане при застосуванні гідравлічного підходу, запишемо у такому вигляді [4]:

$$m \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) + \varepsilon \quad \text{в } P \times (0; T], \quad (3)$$

$$-k \nabla \varphi \cdot \vec{n} = \bar{q} \quad \text{на } \Gamma = \partial P,$$

$$\varphi|_{t=0} = \varphi_0(x) \quad \text{в } P,$$

де

$$k = k(x, t) = \begin{cases} k_s (\eta(x) - \eta_0(x)), & \varphi(x, t) \geq \eta(x); \\ k_s (\varphi(x, t) - \eta_0(x)), & \eta_0(x) < \varphi(x, t) < \eta(x); \\ 0, & \varphi(x, t) \leq \eta_0(x). \end{cases} \quad (4)$$

$k = k(x, t)$ — коефіцієнт рівнепровідності, k_s — коефіцієнт фільтрації, $m = m(x)$ — коефіцієнт питомої водовіддачі, $\varepsilon = \varepsilon(x, t)$ — відома функція джерел притоку води, $\varphi = z + \frac{P_p}{\rho g}$ — п'єзометричний

напір, $\bar{\Omega} = \bar{S} \cup \bar{P}$, $S \cap P = 0$, $\bar{S} \cap P = \Gamma$, $q = -k \nabla \varphi$ — потік,

$v = \frac{q}{\omega}$, ω — об'ємна пористість, $v = v(x, t)$ — вектор швидкості рідини в ґрунті,

$$\vec{n}_s = -\vec{n}_p, \partial S = \Gamma_s \cup \Lambda_s \cup \Gamma, \partial P = \Gamma_p \cup \Lambda_p \cup \Gamma.$$

4. Граничні задачі для ґрунтових вод. Практичне значення має розгляд деяких граничних варіантів загальної задачі (3) більш доступних для розв'язування. Один з варіантів отримаємо, якщо спрямуємо товщину водоносного шару до нуля, але так, щоб опір ґрунту фільтраційного потоку, який рухається паралельно до обмежуючої з низу поверхні, залишився незмінним. У результаті отримаємо двовимірну задачу про рух рідини по заданій криволінійній поверхні, яку ми назвали плановою задачею. Другим граничним варіантом можемо

вважати задачу про рух ґрунтової води по деякій вертикальній циліндричній поверхні заданої форми. Цей варіант отримаємо, коли розглянемо фільтраційний потік між двома вертикальними циліндричними поверхнями і спрямуємо відстань між ними до нуля, залишаючи незмінним опір потоку зі сторони ґрунту при русі потоку паралельно вказаним поверхням. Другий граничний варіант також дає двовимірну задачу, його називають профільним. Такі підходи можна трактувати як усереднення характеристик фільтраційного потоку за напрямом нормалей до поверхонь, що обмежують область фільтрації.

Планову і профільну фільтрацію можна розглядати як спрощені моделі тривимірного фільтраційного потоку. В залежності від того, які характеристики фільтраційного потоку треба дослідити, вибирають ту чи іншу модель.

5. Умови спряження сумісного потоку води. Спочатку перетворимо рівняння (1). Введемо простір:

$$V := \left\{ \xi = \{ \xi_i \}_{i=1}^3 \in H^1(S)^3 \mid \bar{\xi} \cdot \bar{n} |_{\Gamma_s} = 0 \right\},$$

$$\int_S \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \xi_i ds + \int_S \sum_{k=1}^3 \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \xi_i ds - \int_S \rho f_i \xi_i ds + \int_S \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik}(u, p_s) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} ds -$$

$$(5)$$

$$- \int_{\partial S} \xi_i \sum_{k=1}^3 \bar{\sigma}_{ik}(u, p_s) \bar{n}_k d\gamma = 0, i = \overline{1,3}.$$

Далі перейдемо до рівняння нерозривності (2). Домножимо рівняння (2) на $\theta \in Q$, де $Q = L^2(S)$, будемо мати

$$\int_S \frac{\partial \rho}{\partial t} \theta ds + \int_S \sum_{k=1}^3 \frac{\partial(\rho u_k)}{\partial x_k} \theta ds = 0,$$

$$\int_S \frac{\partial \rho}{\partial t} \theta ds + \int_{\partial S} (\rho \bar{u}) \cdot \bar{n}_f \theta d\gamma - \int_S (\rho \bar{u}) \cdot \nabla \theta ds = 0.$$

Припустимо для ґрунтової води $\rho = \text{const}$, тоді попереднє рівняння переписеться у вигляді

$$\int_{\partial S} \bar{u}_n \theta d\gamma - \int_S \bar{u}_s \nabla \theta ds = 0. \quad (6)$$

Розпишемо значення інтегралу по границі області P

$$\int_{\partial S} \bar{u} \cdot \bar{n}_s \theta d\gamma = \int_{\Gamma_s} \bar{u} \cdot \bar{n}_s \theta d\gamma + \int_{\Gamma} \bar{u} \cdot \bar{n}_s \theta d\gamma + \int_{\Lambda_s} \bar{u} \cdot \bar{n}_s \theta d\gamma.$$

Врахуємо, що на поверхні води Λ_s задано кінематичну умову

$$\bar{u}_{n_s} = \tilde{u},$$

і нехай Γ_s обмежена границями території водозбору, тому інтеграл по цій границі буде дорівнювати нулю.

Перейдемо до аналізу рівняння (3). Введемо простір:

$$W := \left\{ \psi \in H^1(P) \mid \psi|_{\Gamma_p} = 0 \right\}.$$

Домножимо це рівняння на $\frac{\rho g}{n_v}$, тоді

$$m \frac{\rho g}{n_v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \frac{\rho g}{n_v} + \frac{\varepsilon \rho g}{n_v}.$$

Проінтегруємо його по області P :

$$\begin{aligned} \int_P m \frac{\rho g}{n_v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi dp &= \int_P \sum_{j=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(k \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \right) \frac{\rho g}{n_v} \psi dp + \int_P \frac{\varepsilon \rho g}{n_v} \psi dp, \\ \int_P m \frac{\rho g}{n_v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi dp - \int_{\partial P} k(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} \frac{\rho g \psi}{n_v} d\gamma &+ \\ + \int_P \sum_{j=1}^3 k(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\rho g}{n_v} dp - \int_P \frac{\varepsilon(x, t) \rho g \psi}{n_v} dp &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Додамо вирази (5) та (7):

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^3 \left[\int_S \rho \frac{\partial u_i}{\partial t} \xi_i ds + \int_S \sum_{k=1}^3 \rho u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \xi_i ds - \int_S \rho f_i \xi_i ds + \right. \\ \left. + \int_S \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik}(u, p_s) \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} ds - \int_{\partial S} \sum_{k=1}^3 \xi_i \bar{\sigma}_{ik}(u, p_s) \bar{n}_k d\gamma \right] + \\ + \int_P m \frac{\rho g}{n_v} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \psi dp - \int_{\partial P} \sum_{j=1}^3 k(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} \frac{\rho g \psi}{n_v} d\gamma + \\ + \int_P \sum_{j=1}^3 k(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial x_j} \frac{\partial \psi}{\partial x_j} \frac{\rho g}{n_v} dp - \int_P \frac{\varepsilon(x, t) \rho g \psi}{n_v} dp = 0. \end{aligned}$$

Розглянемо інтеграли на границях областей:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^3 \int_{\partial S} \xi_i \sum_{k=1}^3 \bar{\sigma}_{ik}(u, p_s) \bar{n}_k d\gamma - \int_{\partial P} k(x, t) \frac{\partial \varphi}{\partial \bar{n}} \frac{\rho g \psi}{n_v} d\gamma = \\ = - \sum_{i=1}^3 \int_{\partial S} \xi_i \sum_{k=1}^3 \bar{\sigma}_{ik}(u, p_s) \bar{n}_k d\gamma - \int_{\partial P} \frac{\rho g \psi}{n_v} k(x, t) (\nabla \bar{\varphi} \cdot \bar{n}_p) d\gamma. \end{aligned}$$

Розкладемо ці інтеграли

$$\begin{aligned}
 & - \int_{\Lambda_s} (\xi_n \bar{\sigma}_{mn}(u, p_s) + \bar{\xi}_\tau \bar{\sigma}_{\tau n}(u, p_s)) d\gamma - \int_{\Gamma_s} (\xi_n \bar{\sigma}_{mn}(u, p_s) + \bar{\xi}_\tau \bar{\sigma}_{\tau n}(u, p_s)) d\gamma - \\
 & - \int_{\Gamma = \partial S \cap \partial P} (\xi_n \bar{\sigma}_{mn}(u, p_s) + \bar{\xi}_\tau \bar{\sigma}_{\tau n}(u, p_s)) d\gamma - \int_{\Gamma_p} k(x, t) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{n}_p} \frac{\rho g \Psi}{n_v} d\gamma - \quad (8) \\
 & - \int_{\Lambda_p} k(x, t) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{n}_p} \frac{\rho g \Psi}{n_v} d\gamma - \int_{\Gamma} k(x, t) \frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{n}_p} \frac{\rho g \Psi}{n_v} d\gamma.
 \end{aligned}$$

Розглянемо значення інтегралів на спільній границі Γ :

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Gamma} (\xi_n \bar{\sigma}_{mn}(u, p_s) + \bar{\xi}_\tau \bar{\sigma}_{\tau n}(u, p_s) + \frac{\rho g \Psi}{n_v} k(x, t) (\nabla \bar{\varphi} \cdot \bar{n}_p)) d\gamma = \\
 & \int_{\Gamma} (\xi_n \bar{\sigma}_{mn}(u, p_s) + \bar{\xi}_\tau \bar{\sigma}_{\tau n}(u, p_s) + \frac{k(x, t) \cdot \nabla \bar{\varphi} \cdot \bar{n}_p}{n_v} \rho g \Psi) d\gamma.
 \end{aligned}$$

Враховуючи суцільність середовища, запишемо умови поведінки вологи на спільній границі Γ [5]:

- 1) $\sigma_{mn}(u, p_s) = p_p$;
- 2) $\bar{\sigma}_{\tau n} = 0$;
- 3) $\bar{u}_n = -\bar{v}_n$.

6. Тестовий приклад сумісного стоку. В Ω_1 рух рідини над поверхнею Γ_u описується системою рівнянь:

$$\begin{aligned}
 \rho(u \cdot \nabla)u &= -\nabla \cdot [-pI + \mu(\nabla u + (\nabla u)^T)] \nabla \cdot u = 0, \\
 \mu &= 1e-1 \text{ (pa*s)}; \quad \rho = 1000 \text{ (kg/m}^3\text{)}.
 \end{aligned}$$

Крайові умови $u = (u_0, v_0)$ на Γ_1 нижче ;

$$\rho = 0, \quad \mu(\nabla u + (\nabla u)^T) = 0 \text{ на } \Gamma_1 \text{ верхнє.}$$

В Ω_2 рух рідини в ґрунті описується рівнянням

$$\frac{\mu}{k} u = \nabla \cdot [-pI + \frac{\mu}{\varepsilon_p} (\nabla u + (\nabla u)^T)] - \frac{\rho \varepsilon_p C_f}{\sqrt{k}} u |u|,$$

де $C_f = 0$; k — коефіцієнт рівнепровідності пористого середовища; ε_p — коефіцієнт пористості ґрунту.

На Γ_1 нижче $u = 2$; Γ_1 верхнє $\cup \Gamma_2$ верхнє $p = 0$, на решта границі $u \cdot n = 0$.

На Γ_u умови контакту (14).

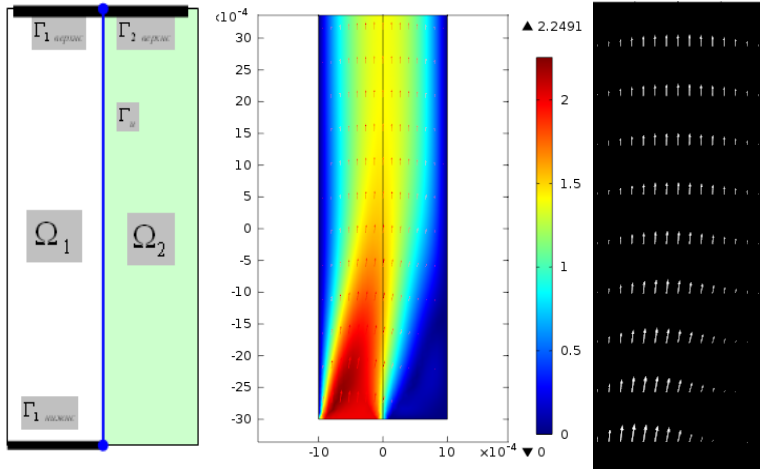


Рис. 3. Поверхня значень та напрямів швидкостей в області Ω

Висновки. Сформульована варіаційна задача спільного руху поверхневих і ґрунтових вод з території водозбору. Виведені умови спряження для різних потоків, виходячи з принципів суцільності середовища води. Отримані розв'язки задачі апробовано на тестових прикладах. Перевірено справедливність результатів з виконання закону збереження маси середовища.

Список використаних джерел:

1. Венгерський П. С. Чисельне моделювання мілкого схилового стоку в кінематичному наближенні / П. С. Венгерський, В. М. Трушевський // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. прик. матем. та інф. — Львів, 2000. — Вип. 1. — С. 44–49.
2. Венгерський П. С. Застосування об'єктно-орієнтованого підходу для опису алгоритмів розв'язування крайових задач методом скінченних елементів / П. С. Венгерський, О. В. Єфремов, Б. М. Стрихалюк // Вісн. Нац. ун-ту «Львівська політехніка». Сер. «Радіоелектроніка та телекомунікації». — Львів, 2002. — № 443. — С. 190–192.
3. Венгерський П. С. Чисельне розв'язування варіаційних задач поверхневого стоку / П. С. Венгерський, В. М. Трушевський, Г. А. Шинкаренко // Вісн. Київськ. нац. ун-ту ім. Тараса Шевченка. Сер. кібернетика. — 2002. — Вип. 3. — С. 26–30.
4. Венгерський П. С. Побудова математичної моделі процесу фільтрації рідини в ґрунті / П. С. Венгерський, О. Демкович // Вісн. Льв. ун-ту. Сер. Прикл. матем. інформ. — 2009. — Вип. 15. — С. 170–177.
5. Венгерський П. С. До моделювання сумісного руху поверхневих та ґрунтових вод / П. С. Венгерський, Я. В. Коковська // Обчислювальна математика і математичні проблеми механіки. — Львів : Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, 2009. — С. 255–257.

For the description of surface flows initial boundary value problem of shallow water is written. Taking into account the hydraulic flow to describe groundwater flow equation is used equation of Busynesku. Given a continuous homogeneous medium water flow formulate the initial-boundary value problem coupled fluid motion on the surface of the watershed. The constructed model was tested on the test examples the convergence and stability problem is investigated taking into account the action of natural factors. Developed programs were calculated using the software package COMSOL.

Key words: *moving layer of fluid, shallow water, surface flow, underground water, piezometric pressure, coupled flow, variational problem, bilinear forms, finite element method, discretization of problem, linearization problem, coupling conditions.*

Отримано: 19.03.2014

УДК 004.021

*А. А. Верлань, канд. техн. наук,

**А. И. Махович, аспирант

* Национальный технический университет Украины «КПИ», г. Киев,

**Каменец-Подольский национальный университет

имени Ивана Огиенко, г. Каменец-Подольский

АППРОКСИМАЦИОННЫЕ МОДЕЛИ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕПЛОВЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛАСТИНЕ С НЕСИММЕТРИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

В работе рассмотрен способ численной реализации математических моделей нестационарных тепловых процессов при наличии несимметричных граничных условий.

Ключевые слова: *модель, нестационарный тепловой процесс, несимметричные граничные условия, аппроксимация, численная реализация.*

Введение. Надежность современных технических систем в значительной степени зависит от соблюдения температурных режимов эксплуатации. Поэтому исследование процессов теплопроводности занимает существенное место в процессе их проектирования. Базовыми математическими моделями этих процессов являются дифференциальные уравнения в частных производных параболического типа. Как известно, методы их решения являются трудоемкими и могут в значительной степени различаться в зависимости от граничных условий [1; 2; 4]. Для решения задач данного класса можно применить многие программные средства компьютерного моделирования (3D-MAX, ANSYS, T-FLEX, MAYA, CATI и др.), использующие,

преимущественно сеточные методы и требующие, как правило, значительных вычислительных мощностей [3; 4].

В статье предлагается численно-аналитический метод моделирования процессов теплопроводности при несимметричных граничных условиях первого и второго рода, основанный на аппроксимационном преобразовании уравнения в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений.

Задача 1. Неограниченная пластина с несимметричными граничными условиями первого рода. Рассмотрим нестационарную задачу теплопроводности с несимметричными граничными условиями первого рода. Температура $T(x, t)$ на границах неограниченной пластины принудительно меняется по различным законам $F_{сп1}^{\pm}(t) \equiv T(x, t)|_{x=\pm 1}$, заданным своими функциями времени (рис. 1). Внутри пластины действует источник тепла, мощность которого пропорциональна $f(t)$. В начальный момент времени имеется заданное по толщине распределение температуры $F_{HY}(x) \equiv T(x, t)|_{t=0}$. Необходимо найти распределение температуры в пластине.

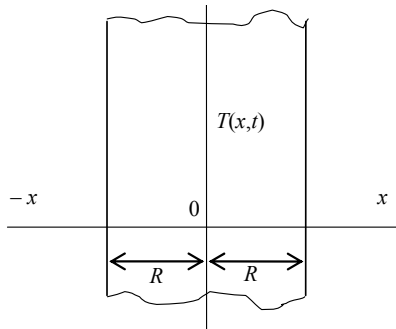


Рис. 1. Схематическое изображение объекта моделирования

Метод решения. В этом случае нестационарный тепловой процесс описывается одномерным гиперболическим уравнением теплопроводности

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) + f(t), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

где $c(x)$ — удельная теплоемкость, $\rho(x)$ — плотность, $k(x)$ — коэффициент теплопроводности, $f(t)$ — внутренний источник тепла, x — пространственная координата, t — время. Поскольку время релаксации τ_r теплового потока есть малая величина (для газов и металлов имеет порядок соответственно 10^{-9} с и 10^{-11} с [5]), то для многих, практически важных расчетов (при отсутствии высокоинтенсивного изменения теп-

лового потока) дополнительным слагаемым $\tau_r \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}$, учитывающим конечную скорость переноса теплоты, можно пренебречь [6]. Таким образом, упрощенная модель теплопереноса описывается уравнением в частных производных параболического типа

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + q(x)f(t), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (1)$$

в котором коэффициент температуропроводности

$$a(x) = \frac{k(x)}{c(x)\rho(x)}, \quad b(x) = \frac{k'(x)}{c(x)\rho(x)}, \quad q(x) = \frac{1}{c(x)\rho(x)}.$$

Для приведения задачи к случаю однородных граничных условий представим искомую функцию в виде суммы

$$T(x,t) = V(x,t) + U(x,t), \quad (2)$$

где $V(x,t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям, а

$$U(x,t) = \frac{x+1}{2} F_{ep1}^+(t) - \frac{x-1}{2} F_{ep1}^-(t) \quad (3)$$

удовлетворяет условиям $F_{ep1}^\pm(t)$.

Введение переменной $U(x,t)$ позволяет устранить несимметричность граничных условий и перейти к симметричному решению задачи методом сечений [7] относительно $V(x,t)$.

Продифференцировав (2) один раз по t и дважды по x и подставив полученные выражения в (1), с учетом (3) получим уравнение

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial V(x,t)}{\partial x} + z(x,t), \quad (4)$$

относительно вспомогательной переменной $V(x,t)$ с однородными граничными условиями

$$F_{ep1}(t) \equiv V(x,t)|_{x=\pm 1} = 0, \quad (5)$$

в котором

$$z(x,t) = \frac{1}{2} b(x) [F_{ep1}^+(t) - F_{ep1}^-(t)] + \frac{x-1}{2} [F_{ep1}^-(t)]' - \frac{x+1}{2} [F_{ep1}^+(t)]' + q(x)f(t).$$

Заменяя в (4), согласно методу сечений для случая симметричных граничных условий, первую производную по пространственной координате выражением

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx 2x(8x^2 - 5)u(0,t) + \frac{32}{3}x(1 - 2x^2)u\left(\frac{1}{2},t\right) + \frac{2}{3}x(8x^2 - 1)F_{zpl}(t), \quad (6)$$

вторую производную выражением

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx (48x^2 - 10)u(0,t) + \left(\frac{32}{3} - 64x^2\right)u\left(\frac{1}{2},t\right) + \left(16x^2 - \frac{2}{3}\right)F_{zpl}(t), \quad (7)$$

с учетом (5), имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{dV(x,t)}{dt} = & \left[a(x)(48x^2 - 10) + b(x)(16x^3 - 10x) \right] V(0,t) + \\ & + \left[a(x)\left(\frac{32}{3} - 64x^2\right) + b(x)\left(\frac{32}{3}x - \frac{64}{3}x^3\right) \right] V\left(\frac{1}{2},t\right) + z(x,t). \end{aligned} \quad (8)$$

Полагая $x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$, получаем систему двух обыкновенных диф-

ференциальных уравнений, определяющих величины $V(0,t)$ и $V\left(\frac{1}{2},t\right)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV(0,t)}{dt} &= -10a(0)V(0,t) + \frac{32}{3}a(0)V\left(\frac{1}{2},t\right) + z(0,t), \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2},t\right)}{dt} &= \left(2a\left(\frac{1}{2}\right) - 3b\left(\frac{1}{2}\right)\right)V(0,t) + \\ &+ \frac{1}{3}\left(8b\left(\frac{1}{2}\right) - 16a\left(\frac{1}{2}\right)\right)V\left(\frac{1}{2},t\right) + z\left(\frac{1}{2},t\right), \end{aligned} \right. \quad (9)$$

в которой

$$\begin{aligned} z(0,t) &= \frac{1}{2}b(0)\left[F_{zpl}^+(t) - F_{zpl}^-(t)\right] - \frac{1}{2}\left[\left(F_{zpl}^-(t)\right)' + \left(F_{zpl}^+(t)\right)'\right] + q(0)f(t), \\ z\left(\frac{1}{2},t\right) &= \frac{1}{2}b\left(\frac{1}{2}\right)\left[F_{zpl}^+(t) - F_{zpl}^-(t)\right] - \frac{1}{4}\left(F_{zpl}^-(t)\right)' - \frac{3}{4}\left(F_{zpl}^+(t)\right)' + q\left(\frac{1}{2}\right)f(t). \end{aligned}$$

Начальные условия для системы (9) имеют вид:

$$\begin{aligned} V(0,t)\Big|_{t=0} &= F_{Hy}(0) - \frac{1}{2}\left(F_{zpl}^+(0) + F_{zpl}^-(0)\right), \\ V\left(\frac{1}{2},t\right)\Big|_{t=0} &= F_{Hy}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4}F_{zpl}^+(0) - \frac{1}{4}F_{zpl}^-(0). \end{aligned} \quad (10)$$

Для приближенного вычисления $V(x,t)$ воспользуемся соответствующей формулой метода сечений [7]:

$$V(x, t) \approx (4x^4 - 5x^2 + 1)V(0, t) + \frac{16}{3}x^2(1-x^2)V\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{1}{3}x^2(4x^2 - 1)F_{zpl}(t).$$

Приближенное решение задачи в произвольной точке получается подстановкой в (2) полученного выражения для $V(x, t)$ с учетом (5) и для $U(x, t)$ в соответствии с (3):

$$T(x, t) = U(x, t) + V(x, t) \approx \frac{x+1}{2}F_{zpl}^+(t) - \frac{x-1}{2}F_{zpl}^-(t) + (4x^4 - 5x^2 + 1)V(0, t) + \frac{16}{3}x^2(1-x^2)V\left(\frac{1}{2}, t\right). \quad (11)$$

Процесс решения рассмотрим на модельном примере конкретной задачи, для которой:

$$a(x) = \frac{b_2(a_0 + a_1x - a_2x^2)}{2a_2}, \quad a_0 + a_1x - a_2x^2 > 0, \quad b_2 > 0, \quad a_2 > 0, \quad (12)$$

$$b(x) \equiv 0, \quad q(x) \equiv 1, \quad f(t) = b_1e^{-b_1t}, \quad (13)$$

$$F_{zpl}^{\pm}(t) = 1 - e^{-b_1t} + (a_0 \pm a_1 - a_2)e^{-b_2t}, \quad (14)$$

$$F_{HY}(x) = a_0 + a_1x - a_2x^2. \quad (15)$$

Задача (1), (12)–(15) имеет точное аналитическое решение

$$T(x, t) = 1 - e^{-b_1t} + (a_0 + a_1x - a_2x^2)e^{-b_2t}. \quad (16)$$

С учетом (13)–(14) система (9) принимает вид:

$$\begin{cases} \frac{dV(0, t)}{dt} = a(0) \left[-10V(0, t) + \frac{32}{3}V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + b_2(a_0 - a_2)e^{-b_2t}, \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} = a\left(\frac{1}{2}\right) \left[2V(0, t) - \frac{16}{3}V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + b_2\left(a_0 + \frac{a_1}{2} - a_2\right)e^{-b_2t}. \end{cases} \quad (17)$$

Начальные условия (10) для системы (17):

$$\begin{aligned} V(0, t) \Big|_{t=0} &= a_2, \\ V\left(\frac{1}{2}, t\right) \Big|_{t=0} &= \frac{3}{4}a_2. \end{aligned} \quad (18)$$

Приближенное решение (11) задачи в произвольной точке принимает вид:

$$T(x, t) \approx 1 - e^{-b_1t} + (a_0 + a_1x - a_2)e^{-b_2t} + (4x^4 - 5x^2 + 1)V(0, t) + \frac{16}{3}x^2(1-x^2)V\left(\frac{1}{2}, t\right). \quad (19)$$

Численные эксперименты. Апробация метода проведена посредством численных экспериментов для ряда значений шага дискретизации $\tau_0 = 10^{-4}$ с, $\tau_i = i \cdot 5 \cdot 10^{-4}$ с, $i = 1..1000$ по временной переменной t при следующих значениях коэффициентов: $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0.5$, $b_1 = 0.1$, $b_2 = 0.5$. При этом $a(0) = 1$, $a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{16}$, $t \in [0, 10]$, $x \in [-1, 1]$. Для пространственной координаты был выбран шаг дискретизации 0,01.

Система (17) численно решалась с помощью стандартного решателя в среде Matlab. Полученные результаты использовались для вычисления решений для любых значений пространственной координаты и для любого момента времени согласно выражению (19).

Результат решения модельной задачи для шага $\tau = 0,2945$ с представлен на рис. 2.

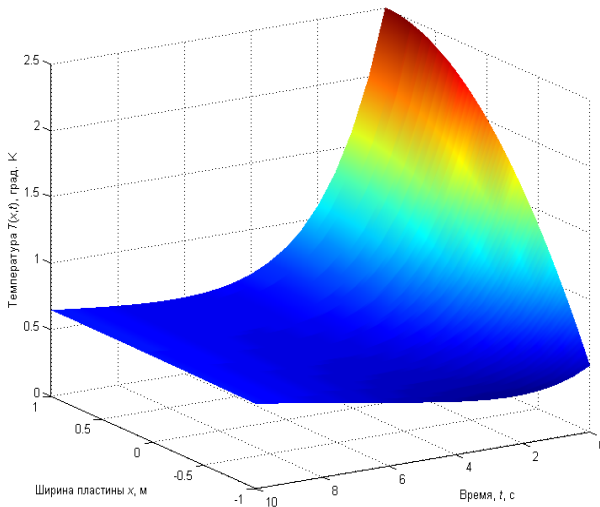


Рис. 2. График зависимости температуры от пространственной координаты и времени

В экспериментах исследовалась зависимость относительной погрешности решения от шага дискретизации. Приближенное решение задачи (1), (12)–(15) сравнивалось с точным решением (16). Зависимость максимального значения относительной погрешности решения

$$\delta(\tau) = \max_x \left(\max_t [T(x,t)] \right)$$

от шага дискретизации τ приведена на рис. 3. При шаге дискретизации $\tau = 0,2945$ с получено наименьшее значение относительной погрешности $\delta = 0,0086$. Вид функции относительной погрешности $\delta(t, x)$ при данном шаге приведен на рис. 4.

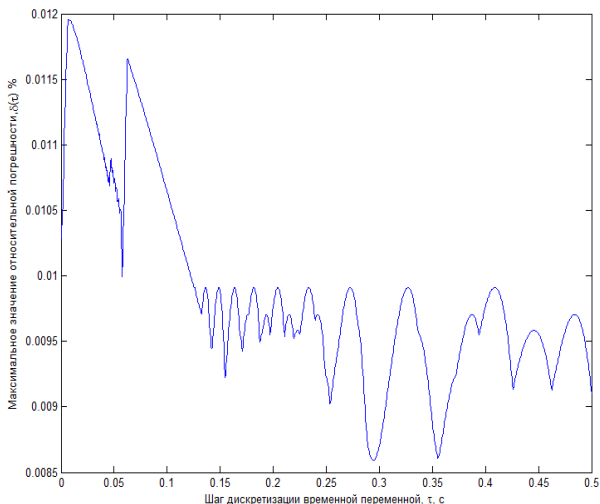


Рис. 3. График зависимости максимального значения относительной погрешности решения от шага дискретизации

Задача 2. Неограниченная пластина с несимметричными граничными условиями второго рода. Неограниченная пластина (рис. 1) с коэффициентом температуропроводности $a(x)$ нагревается с обеих сторон различными источниками с переменными во времени тепловыми потоками, заданными своими функциями времени

$$F_{sp2}^{\pm}(t) \equiv \left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\pm 1}.$$

Внутри пластины действует источник тепла, мощность которого пропорциональна $f(t)$. В начальный момент времени имеется заданное по толщине распределение температуры $F_{HY}(x) \equiv T(x, t)|_{t=0}$. Необходимо найти распределение температуры $T(x, t)$ в пластине. Таким образом, исследуется нестационарный тепловой процесс, который, учитывая допущения, сделанные для первой задачи, описывается одномерным уравнением теплопроводности (1) с несимметричными граничными условиями второго рода.

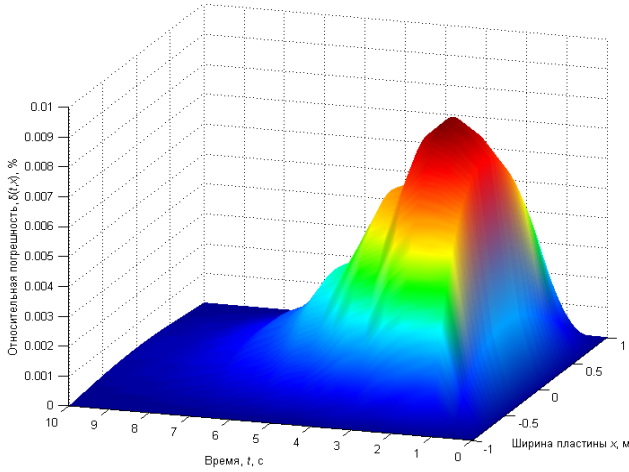


Рис. 4. График зависимости относительной погрешности решения от пространственной и временной координат

Метод решения. Перейдем к задаче с однородными граничными условиями аналогично случаю, рассмотренному в задаче 1. Представим решение $T(x, t)$ в виде суммы

$$T(x, t) = U(x, t) + V(x, t), \quad (20)$$

где $V(x, t)$ удовлетворяет однородным граничным условиям, а

$$U(x, t) = m_1(t)x^2 + m_2(t)x. \quad (21)$$

Величины $m_1(t)$ и $m_2(t)$ выбираем такими, чтобы удовлетворялись граничные условия $F_{ep2}^{\pm}(t)$. Продифференцировав (21) по x , получим

$$m_1(t) = \frac{1}{4}(F_{ep2}^+(t) - F_{ep2}^-(t)), \quad m_2(t) = \frac{1}{2}(F_{ep2}^+(t) + F_{ep2}^-(t)). \quad (22)$$

Отсюда

$$U(x, t) = \frac{x}{4} \left[(x+2)F_{ep2}^+(t) + (2-x)F_{ep2}^-(t) \right], \quad (23)$$

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{x}{4} \left[(x+2)[F_{ep2}^+(t)]' + (2-x)[F_{ep2}^-(t)]' \right], \quad (24)$$

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = \frac{x+1}{2} F_{ep2}^+(t) + \frac{1-x}{2} F_{ep2}^-(t), \quad (25)$$

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2} (F_{ep2}^+(t) - F_{ep2}^-(t)). \quad (26)$$

Подставив (20) в (1) с учетом (24)–(26), имеем:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + z(x, t), \quad (27)$$

где

$$z(x, t) = \frac{1}{2} [a(x) + (x+1)b(x)] F_{\varepsilon p 2}^+(t) + \frac{1}{2} [(1-x)b(x) - a(x)] F_{\varepsilon p 2}^-(t) - \frac{x}{4} \left((x+2) [F_{\varepsilon p 2}^+(t)]' + (2-x) [F_{\varepsilon p 2}^-(t)]' \right) + q(x) f(t).$$

Поскольку функция $U(x, t)$ выбрана таким образом, чтобы удовлетворять граничным условиям, то уравнение (27) должно решаться с однородными граничными условиями

$$F_{\varepsilon p 2}(t) \equiv \left. \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\pm 1} = 0. \quad (28)$$

Заменяя в (27), согласно методу сечений для симметричных граничных условий второго рода [7], частные производные первого и второго порядка на аппроксимирующие их выражения

$$\frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx \frac{64}{7} x(x^2 - 1) \left[u(0, t) - u\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + \frac{1}{7} x(8x^2 - 1) F_{\varepsilon p 2}(t),$$

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{64}{7} (3x^2 - 1) \left[u(0, t) - u\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + \frac{1}{7} (24x^2 - 1) F_{\varepsilon p 2}(t),$$

и полагая $x=0$ и $x=\frac{1}{2}$, получим систему двух обыкновенных дифференциальных уравнений, определяющих величины $V(0, t)$ и $V\left(\frac{1}{2}, t\right)$:

$$\begin{cases} \frac{dV(0, t)}{dt} = \frac{64}{7} \left(V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right) a(0) + z(0, t), \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} = \frac{64}{7} \left(V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right) \left(-\frac{1}{4} a\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{8} b\left(\frac{1}{2}\right) \right) + z\left(\frac{1}{2}, t\right), \end{cases} \quad (29)$$

где

$$z(0, t) = \frac{1}{2} (a(0) + b(0)) F_{\varepsilon p 2}^+(t) + \frac{1}{2} (b(0) - a(0)) F_{\varepsilon p 2}^-(t) + q(0) f(t),$$

$$z\left(\frac{1}{2}, t\right) = \frac{1}{2} \left(a\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} b\left(\frac{1}{2}\right) \right) F_{\varepsilon p 2}^+(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} b\left(\frac{1}{2}\right) - a\left(\frac{1}{2}\right) \right) F_{\varepsilon p 2}^-(t) - \frac{1}{16} \left(5 [F_{\varepsilon p 2}^+(t)]' + 3 [F_{\varepsilon p 2}^-(t)]' \right) + q\left(\frac{1}{2}\right) f(t).$$

Для системы (29) заданы начальные условия:

$$\begin{aligned} V(0, t) \Big|_{t=0} &= F_{HY}(0), \\ V\left(\frac{1}{2}, t\right) \Big|_{t=0} &= F_{HY}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16}\left(5F_{zp2}^+(0) + 3F_{zp2}^-(0)\right). \end{aligned} \quad (30)$$

Воспользовавшись формулой для вычисления $V(x, t)$ согласно методу сечений для случая симметричных граничных условий второго рода

$$u(x, t) \approx \frac{16}{7}x^2(x^2 - 2)\left[u(0, t) - u\left(\frac{1}{2}, t\right)\right] + \frac{1}{7}x^2\left(2x^2 - \frac{1}{2}\right)F_{zp2}(t) + u(0, t)$$

с учетом (28) и (23), получим возможность вычисления произвольных значений искомой функции:

$$\begin{aligned} T(x, t) &= U(x, t) + V(x, t) \approx \frac{x}{4}\left[(x+2)F_{zp2}^+(t) + (2-x)F_{zp2}^-(t)\right] + \\ &+ \frac{16}{7}x^2(x^2 - 2)\left[V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right)\right] + V(0, t). \end{aligned} \quad (31)$$

Рассмотрим упрощенную конкретную задачу, в которой коэффициент теплопроводности, внутренний источник тепла и начальное распределение температуры равны соответственно

$$a(x) = \frac{b_2(a_0 + a_1x - a_2x^2)}{2a_2}, \quad a_0 + a_1x - a_2x^2 > 0, \quad b_2 > 0, \quad a_2 > 0, \quad (32)$$

$$b(x) \equiv 0, \quad q(x) \equiv 1, \quad f(t) = b_1e^{-b_1t}, \quad (33)$$

$$F_{HY}(x) = a_0 + a_1x - a_2x^2. \quad (34)$$

а несимметричные граничные условия имеют вид

$$F_{zp2}^\pm(t) = (a_1 \pm 2a_2)e^{-b_2t}. \quad (35)$$

Задача (1),(32)–(35) имеет точное аналитическое решение

$$T(x, t) = 1 - e^{-b_1t} + (a_0 + a_1x - a_2x^2)e^{-b_2t}. \quad (36)$$

Система (29) приобретает вид:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dV(0, t)}{dt} &= -\frac{64}{7}a^2(0)\left[V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right)\right] - 2a_2a^2(0)e^{-b_2t} + b_1e^{-b_1t}; \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} &= -\frac{16}{7}a^2\left(\frac{1}{2}\right)\left[V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right)\right] + \\ &+ \left[b_2\left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{4}\right) - 2a_2a^2\left(\frac{1}{2}\right)\right]e^{-b_2t} + b_1e^{-b_1t}. \end{aligned} \right. \quad (37)$$

Для системи (37) заданы начальные условия:

$$V(0,t)\Big|_{t=0} = V\left(\frac{1}{2},t\right)\Big|_{t=0} = a_0. \quad (38)$$

Воспользовавшись формулой (31), получим возможность вычисления произвольных значений искомого решения:

$$T(x,t) \approx (a_1 x - a_2 x^2) e^{-b_2 t} + \frac{16}{7} x^2 (x^2 - 2) \left[V(0,t) - V\left(\frac{1}{2},t\right) \right] + V(0,t). \quad (39)$$

Численные эксперименты. Для различных значений шага дискретизации $\tau_0 = 10^{-4}$ с, $\tau_i = i \cdot 5 \cdot 10^{-4}$ с, $i = 1..1000$ временной переменной t задаем следующие значения коэффициентов: $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0,5$, $b_1 = 0,1$, $b_2 = 0,5$. Тогда $a^2(0) = 1$, $a^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{16}$, $t \in [0,10]$, $x \in [-1,1]$.

По пространственной координате шаг равен 0,01. Система (37) с начальными значениями (38) численно решалась с помощью стандартного решателя в среде Matlab. Полученные результаты используются для вычисления согласно (39) значений решения при произвольных значениях аргументов.

Результат решения задачи при шаге $\tau = 0,01$ с представлен на рис. 5. Зависимость максимального значения относительной погрешности решения

$$\delta(\tau) = \max_x \left(\max_t [T(x,t)] \right)$$

от шага дискретизации τ приведена на рис. 6.

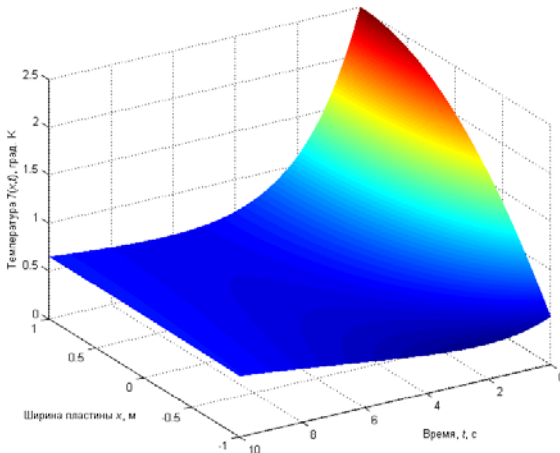


Рис. 5. График зависимости температуры от пространственной координаты и времени

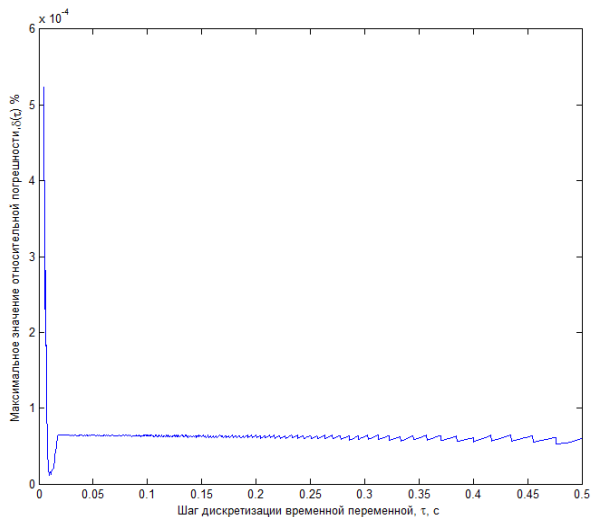


Рис. 6. График зависимости максимального значения относительной погрешности решения от шага дискретизации

Результаты численных экспериментов показали, что при шаге дискретизации $\tau = 0,01$ с получено наименьшее значение относительной погрешности $\delta = 0,0000117$.

Зависимость $\delta(t, x)$ при данном шаге приведено на рис. 7.

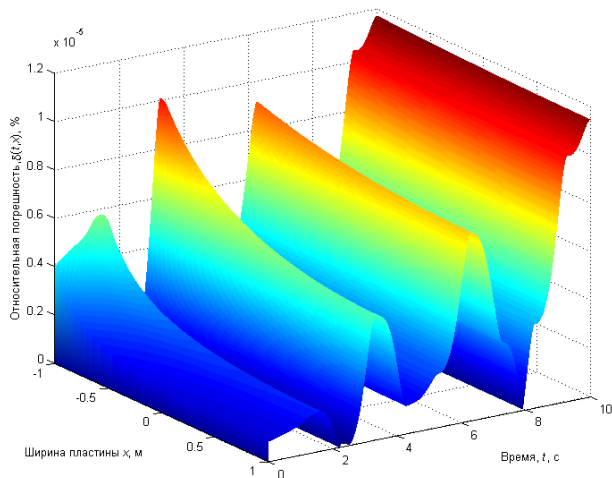


Рис. 7. График зависимости относительной погрешности решения от пространственной и временной координат

Выводы. Предложенный метод численной реализации математических моделей нестационарных тепловых процессов при наличии несимметричных граничных условий I-II рода обладает достаточной для инженерных расчетов точностью (относительная погрешность в проведенном эксперименте не превышает 0,0086%). Метод позволяет значительно упростить вычисления по сравнению с традиционными методами расчетов.

Список использованной литературы:

1. Конет И. М. Обобщенные нестационарные температурные поля в плоских прямоугольных областях / И. М. Конет, М. П. Ленюк // Интегральные преобразования в задачах теплопроводности и упругости. — К., 1986. — С. 3–15. — (Препр. /АН УССР. Ин-т математики; 86.54).
2. Конет І. М. Нестационарні температурні поля в безкрайній ізотропній пластинці / І. М. Конет, А. П. Громик // Інтегральні перетворення та їх застосування до крайових задач : зб. наук. праць. — К. : Ін-т математики АН України, 1994. — Вип. 5. — С. 92–97.
3. Верлань А. Ф. Компьютерное моделирование процессов передачи тепла в перспективных базовых несущих конструкциях стоечного типа с тепловыми трубами / А. Ф. Верлань, И. О. Горошко, Ю. Е. Николаенко // Математичні машини і системи. — 2008.— № 2.— С. 90–99.
4. Самарский А. А. Вычислительная теплопередача / А. А. Самарский, П. Н. Вабищевич. — М. : Едиториал УРСС, 2003. — 784 с.
5. Лыков А. В. Теория теплопроводности / А. В. Лыков. — М. : Высшая школа, 1967. — 600 с.
6. Шашков А. Г. Методы определения теплопроводности и температуропроводности / А.Г. Шашков, Г. М. Волохов, Т. Н. Абраменко, В. П. Козлов ; под ред. А. В. Лыкова. — М. : Энергия, 1973. — 336 с.
7. Федорчук В. А. Об одном методе исследования динамики нестационарных тепловых процессов при наличии симметричных граничных условий / В. А. Федорчук, А. И. Махович // Электронное моделирование. — 2014. — № 3. — С. 71–79.

The paper deals with the numerical solution of mathematical models of transient thermal processes in the presence of asymmetric boundary conditions.

Key words: *model, transient thermal process, asymmetric boundary conditions, approximation, numerical.*

Отримано: 21.03.2014

УДК 517.5

В. О. Гнатюк, канд. фіз.-мат. наук,

У. В. Гудима, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

МЕТОД СІЧНОЇ ПЛОЩИНИ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ЗАДАЧІ НАЙКРАЩОЇ У РОЗУМІННІ СІМ'І ОПУКЛИХ ЛІПШІЦЕВИХ ФУНКЦІЙ РІВНОМІРНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ НЕПЕРЕРВНОГО КОМПАКТНОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ СКІНЧЕННОВИМІРНИМ ПІДПРОСТОРОМ

У статті на основі ідеї методу січних площин розв'язування задачі опуклого програмування побудовано збіжний метод розв'язування задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих ліпшіцевих функцій рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень.

Ключові слова: *компактнозначне відображення, найкраща у розумінні сім'ї опуклих ліпшіцевих функцій апроксимація, скінченновимірний підпростір, вагова функція.*

Вступ. Проблеми відновлення функціональних залежностей, які неточно визначені, за встановленими діапазонами їх можливих значень приводять до задач найкращої у деякому розумінні апроксимації багатозначного відображення множинами однозначних відображень.

У статті для задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих ліпшіцевих функцій рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором неперервних однозначних відображень побудовано метод, який базується на ідеї методу січних площин розв'язування задачі опуклого програмування, запропонованого у праці [1], доведено його збіжність, отримано двосторонні оцінки, які дозволяють знайти величину найкращого наближення з наперед заданою точністю, обґрунтовано, що побудований метод може успішно використовуватися при розв'язуванні задачі найкращої зваженої рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором.

Постановка задачі. Нехай S — компакт, X — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, $C(S, X)$ — лінійний над полем дійсних чисел простір всіх неперервних однозначних відображень g компакта S в X з нормою $\|g\| = \max_{s \in S} \|g(s)\|$, $K(X)$ — сукупність всіх непорожніх компактів простору X , $\tilde{C}(S, K(X))$ —

множина багатозначних півнеперервних зверху на S відображень a компакта S в X таких, що для кожного $s \in S$ $a(s) = K_s \in K(X)$, V — скінченновимірний підпростір простору $C(S, X)$, породжений лінійно незалежними відображеннями $g_i \in C(S, X)$, $i = \overline{1, n}$, $\{p_s\}_{s \in S}$ — сім'я заданих на X опуклих ліпшіцевих з константою l функцій p_s , $s \in S$, таких, що відображення $s \in S \rightarrow p_s(x)$ неперервне на S при кожному $x \in X$.

Задачею найкращої у розумінні сім'ї $\{p_s\}_{s \in S}$ рівномірної апроксимації компактнозначного відображення $a \in \tilde{C}(S, K(X))$ підпростором V неперервних однозначних відображень будемо називати задачу відшукування величини

$$\begin{aligned} \alpha_V^*(a) &= \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - g(s)) = \\ &= \inf_{(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s \left(y - \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(s) \right). \end{aligned} \quad (1)$$

Якщо існує відображення $g^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* g_i$, $\alpha_i^* \in R^n$, $i = \overline{1, n}$, таке, що

$$\alpha_V^*(a) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - g^*(s)) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s \left(y - \sum_{i=1}^n \alpha_i^* g_i(s) \right),$$

то його будемо називати екстремальним елементом для величини (1).

Актуальність теми. Теорія багатозначних відображень, яка інтенсивно розвивається в останні десятиріччя, знаходить багаточисельні застосування в теорії оптимального керування, теорії оптимізації, опуклому аналізі, теорії ігор, математичній економіці та інших галузях сучасної математики.

Важливий розділ цієї теорії утворюють задачі найкращого наближення складних багатозначних відображень відображеннями простішої структури (див., наприклад, [2–6]), у тому числі задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень (див., наприклад, [7–9]).

Актуальність дослідження і розв'язування задач найкращої рівномірної апроксимації багатозначного відображення множинами однозначних відображень мотивується ще й тим, що з цими задачами тісно пов'язані задачі оптимального відновлення функціоналів за інформацією про діапазони їх можливих значень (див., наприклад [10], [11]).

Чимало задач найкращого зваженого рівномірного відновлення функціональних залежностей, які не означені точно, вкладаються у схему постановки задачі відшукування величини (1).

Практичне використання величини (1) та її екстремального елемента вимагає розробки чисельних методів їх відшукування.

Мета роботи. Побудувати метод відшукування величини (1) та її екстремального елемента, оснований на ідеї методу січних площин розв'язування задачі опуклого програмування.

Деякі означення та допоміжні твердження. Нехай X^* — простір, спряжений з X , F — дійснозначна функція, задана на X .

Полярною F^* функції F , або функцією, спряженою з F , називається функція, задана на X^* , означена рівністю $F^*(f) = \sup_{x \in X} (f(x) - F(x))$,

$f \in X^*$, (див., наприклад, [12, с. 306]).

Множина $\text{dom} F^* = \{f : f \in X^*, F^*(f) < +\infty\}$ називається ефективною множиною функції F^* (див., наприклад, [12, с. 306]).

Елемент $f \in X^*$ називається субградієнтом функції F в точці $x_0 \in X$, якщо

$$F(x) - F(x_0) \geq f(x) - f(x_0), \quad x \in X,$$

(див., наприклад, [12, с. 324]).

Множину субградієнтів функції F в точці $x_0 \in X$ називають субдиференціалом цієї функції в точці x_0 і позначають $\partial F(x_0)$ (див., наприклад, [12, с. 324]).

Якщо F є опуклою неперервною на X функцією, то для $x_0 \in X$ $\partial F(x_0)$ є непорожньою опуклою слабо* компактною множиною простору X^* (див., наприклад, [12, с. 327]).

Твердження 1. Для кожного $a \in \tilde{C}(S, K(X))$ функція

$$\Phi_a(h) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - h(s)), \quad h \in C(S, X),$$

є опуклою та ліпшіцевою з константою l на $C(S, X)$.

Доведення. Опуклість функції $\Phi_a(h)$, $h \in C(S, X)$, випливає з опуклості функцій p_s на X , $s \in S$, та властивостей верхньої межі довільної сім'ї опуклих функцій (див., наприклад, [13, с.180]).

Переконаємося, що $\Phi_a(h)$, $h \in C(S, X)$, є ліпшіцевою на $C(S, X)$ з константою l .

Нехай $h_1, h_2 \in C(S, X)$ та

$$\begin{aligned}\Phi_a(h_1) &= \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - h_1(s)) = \\ &= \max_{y \in a(s_1)} p_{s_1}(y - h_1(s_1)) = p_{s_1}(y_1 - h_1(s_1)),\end{aligned}$$

де $s_1 \in S$, $y_1 \in a(s_1)$.

Тоді

$$\begin{aligned}\Phi_a(h_1) - \Phi_a(h_2) &= p_{s_1}(y_1 - h_1(s_1)) - \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - h_2(s)) \leq \\ &\leq p_{s_1}(y_1 - h_1(s_1)) - \max_{y \in a(s_1)} p_{s_1}(y - h_2(s_1)) \leq \\ &\leq p_{s_1}(y_1 - h_1(s_1)) - p_{s_1}(y_1 - h_2(s_1)) \leq \quad (2) \\ &\leq l \|y_1 - h_1(s_1) - (y_1 - h_2(s_1))\| = l \|h_1(s_1) - h_2(s_1)\| = \\ &= l \|(h_1 - h_2)(s_1)\| \leq l \max_{s \in S} \|(h_1 - h_2)(s)\| = l \|h_1 - h_2\|.\end{aligned}$$

Аналогічно доводиться, що

$$\Phi_a(h_2) - \Phi_a(h_1) \leq l \|h_1 - h_2\|. \quad (3)$$

З (2), (3) випливає, що

$$|\Phi_a(h_1) - \Phi_a(h_2)| \leq l \|h_1 - h_2\|, \quad h_1, h_2 \in C(S, X).$$

Твердження доведено.

Наслідок 1. Для кожного $a \in \tilde{C}(S, K(X))$ функція

$$\psi_a(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s\left(y - \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(s)\right), \quad (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n,$$

є неперервною на R^n .

Доведення. Згідно з твердженням 1 для точок $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)$ простору R^n одержимо, що

$$\begin{aligned}|\psi_a(\alpha_1, \dots, \alpha_n) - \psi_a(\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)| &= \left| \Phi_a\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i g_i\right) - \Phi_a\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i^0 g_i\right) \right| \leq \\ &\leq l \left\| \sum_{i=1}^n (\alpha_i - \alpha_i^0) g_i \right\| \leq l \sum_{i=1}^n |\alpha_i - \alpha_i^0| \|g_i\|.\end{aligned}$$

Звідси й випливає неперервність функцій $\psi_a(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$, в точці $(\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)$. Оскільки точку $(\alpha_1^0, \dots, \alpha_n^0)$ виб-

рано довільно з R^n , то $\psi_a(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n$, є неперервною на R^n .

Наслідок доведено.

Основні результати. Будемо припускати, що існують точки $s_j \in S$, функціонали $f_j \in \text{domp}_{s_j}^*$, $j = \overline{1, m_1}$, такі, що

$$\max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^n \alpha_i f_j(g_i(s_j)) > 0, \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq 0 = (0, \dots, 0). \quad (4)$$

Зрозуміло, що умова (4) виконується тоді і тільки тоді, коли

$$\min_{\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in S_{R^n}} \max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^n \alpha_i f_j(g_i(s_j)) = \bar{\mu} > 0, \quad (5)$$

де $S_{R^n} = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in R^n : \sum_{i=1}^n \alpha_i^2 = 1 \right\}$ — одинична сфера простору R^n .

На попередньому кроці методу вибираємо точки $s_j \in S$, функціонали $f_j \in \text{domp}_{s_j}^*$, $j = \overline{1, m_1}$, такі, для яких виконується умова (4) (5).

На k -му кроці ($k \geq 1$) будемо розв'язувати задачу лінійного програмування:

$$\inf \theta \quad (6)$$

при обмеженнях

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_j(g_i(s_j)) + \theta \geq f_j(y_j) - p_{s_j}^*(f_j), \quad j = \overline{1, m_1 + k - 1}, \quad (7)$$

де для $j = \overline{1, m_1}$ точки y_j вибираються з $a(s_j)$ довільно.

Зрозуміло, що задача лінійного програмування (6),(7) має допустимий розв'язок. Таким допустимим розв'язком буде, наприклад, вектор $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n; \bar{\theta})$, де $(\bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$ вибрано довільно з R^n , а

$$\bar{\theta} = \max_{1 \leq j \leq m_1 + k - 1} \left(f_j(y_j) - \sum_{i=1}^n \bar{\alpha}_i f_j(g_i(s_j)) - p_{s_j}^*(f_j) \right).$$

Для всіх допустимих розв'язків $(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \theta)$ задачі (6), (7) маємо, що

$$\max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^n \alpha_i f_j(-g_i(s_j)) - \max_{1 \leq j \leq m_1} (p_{s_j}^*(f_j) - f_j(y_j)) \leq \theta.$$

Звідки при $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \neq (0, \dots, 0)$

$$\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha^2} \max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^n \frac{-\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha^2_i}} f_j(g_i(s_j)) - \max_{1 \leq j \leq m_1} (p_{s_j}^*(f_j) - f_j(y_j)) \leq \theta.$$

Оскільки згідно з (5)

$$\max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^n \frac{-\alpha_i}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha^2_i}} f_j(g_i(s_j)) \geq \bar{\mu} > 0,$$

то звідси випливає, що

$$\theta \geq - \max_{1 \leq j \leq m_1} (p_{s_j}^*(f_j) - f_j(y_j)). \quad (8)$$

Отже, для будь-якого допустимого розв'язку $(\alpha_1, \dots, \alpha_n; \theta)$ задачі (6), (7) має місце співвідношення (8).

Це означає, що цільова функція θ цієї задачі лінійного програмування обмежена знизу на множині її допустимих розв'язків. Тому задача лінійного програмування (6), (7) має оптимальний розв'язок (див., наприклад, [14, с. 110]).

Теорема 1. Якщо $(\alpha^k; \theta^k) = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k; \theta^k)$ є оптимальним розв'язком задачі (6), (7), то мають місце співвідношення

$$\theta^k \leq \alpha_V^*(a) \leq \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - g^k(s)), \quad (9)$$

де $g^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k g_i$, $k = 1, 2, \dots$.

Якщо для деякого натурального k

$$\theta^k = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - g^k(s)),$$

то g^k є екстремальним елементом для величини (1) і справедлива рівність

$$\theta^k = \alpha_V^*(a) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - g^k(s)). \quad (10)$$

Доведення. Оскільки вектор $(\alpha^k, \theta^k) = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k; \theta^k)$ є оптимальним розв'язком задачі (6), (7), то

$$\theta^k = \inf \left\{ \theta : f_j \left(y_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(s_j) \right) - p_{s_j}^*(f_j) \leq \theta, \right.$$

$$\begin{aligned}
 & j = \overline{1, m_1 + k - 1}, (\alpha_1, \dots, \alpha_n; \theta) \in R^{n+1} \} = \\
 & = \max_{1 \leq j \leq m_1 + k - 1} \left(f_j \left(y_j - \sum_{i=1}^n \alpha_i^k g_i(s_j) \right) - p_{s_j}^*(f_j) \right) = \\
 & = \max_{1 \leq j \leq m_1 + k - 1} \left(f_j(y_j - g^k(s_j)) - p_{s_j}^*(f_j) \right) \leq \\
 & \leq \inf \left\{ \theta : f \left(y - \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(s) \right) - p_s^*(f) \leq \theta, s \in S, \right. \\
 & \left. y \in a(s), f \in \text{dom } p_s^*, (\alpha_1, \dots, \alpha_n; \theta) \in R^{n+1} \right\} = \quad (11) \\
 & = \inf \left\{ \theta : \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \max_{f \in \text{dom } p_s^*} \left(f \left(y - \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(s) \right) - p_s^*(f) \right) \leq \theta, \right. \\
 & \left. (\alpha_1, \dots, \alpha_n; \theta) \in R^{n+1} \right\} = \inf \left\{ \theta : \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s \left(y - \sum_{i=1}^n \alpha_i g_i(s) \right) \leq \theta, \right. \\
 & \left. (\alpha_1, \dots, \alpha_n; \theta) \in R^{n+1} \right\} = \inf \left\{ \theta : \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - g(s)) \leq \theta, \right. \\
 & \left. g \in V, \theta \in R \right\} = \inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - g(s)) = \alpha_V^*(a) \leq \\
 & \leq \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - g^k(s)).
 \end{aligned}$$

Із співвідношення (11) випливають співвідношення (9).

Якщо для деякого натурального k

$$\theta^k = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - g^k(s)),$$

то, враховуючи (9), робимо висновок, що g^k є екстремальним елементом для величини (1) і справедлива рівність (10).

Теорему доведено.

Отже, якщо для деякого натурального k

$$\theta^k = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - g^k(s)),$$

то згідно з теоремою 2 g^k є екстремальним елементом для величини (1) і $\alpha_V^*(a) = \theta^k$.

У цьому випадку процес відшукування величини (1) та її екстремального елемента завершено.

Розглянемо випадок, коли

$$\theta^k < \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s \left(y - g^k(s) \right).$$

Тоді знаходимо точки $s_{m_i+k} \in S$, $y_{m_i+k} \in a(s_{m_i+k})$ такі, що

$$\begin{aligned} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s \left(y - g^k(s) \right) &= \max_{y \in a(s_{m_i+k})} p_{s_{m_i+k}} \left(y - g^k(s_{m_i+k}) \right) = \\ &= p_{s_{m_i+k}} \left(y_{m_i+k} - g^k(s_{m_i+k}) \right), \end{aligned}$$

функціонал $f_{m_i+k} \in \partial p_{s_{m_i+k}} \left(y_{m_i+k} - g^k(s_{m_i+k}) \right)$ та до обмежень (7) задачі лінійного програмування (6), (7) додаємо обмеження

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_{m_i+k} \left(g_i(s_{m_i+k}) \right) + \theta \geq f_{m_i+k} \left(y_{m_i+k} \right) - p_{s_{m_i+k}}^* \left(f_{m_i+k} \right),$$

де

$$p^* \left(f_{m_i+k} \right) = f_{m_i+k} \left(y_{m_i+k} - g^k(s_{m_i+k}) \right) - p_{s_{m_i+k}} \left(y_{m_i+k} - g^k(s_{m_i+k}) \right)$$

(див., наприклад, [12, с. 16]), знаходимо оптимальний розв'язок $(\alpha^{k+1}, \theta^{k+1}) = (\alpha_1^{k+1}, \dots, \alpha_n^{k+1}, \theta^{k+1})$ одержаної нової задачі лінійного програмування і т.д.

Теорема 2. Послідовність $\{\theta^k\}_{k=1}^{\infty}$ є неспадною, існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k$.

Послідовність $\{\alpha^k\}_{k=1}^{\infty}$, де $\alpha^k = (\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k)$, $k = 1, 2, \dots$, є обмеженою послідовністю простору R^n . Для будь-якої часткової границі $\alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ послідовності $\{\alpha^k\}_{k=1}^{\infty}$ елемент $g^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1). Мають місце співвідношення:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k = \alpha_V^*(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s \left(y - g^k(s) \right), \quad (12)$$

де $g^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k g_i$, $k = 1, 2, \dots$

Доведення. Оскільки обмеження задачі лінійного програмування (6), (7), яка розв'язується на k -ому кроці, включається в обмеження задачі лінійного програмування, яка розв'язується на $k+1$ -му кроці методу, а цільові функції цих задач однакові, то для відповідних їх оптимальних розв'язків $(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k; \theta^k)$ та $(\alpha_1^{k+1}, \dots, \alpha_n^{k+1}; \theta^{k+1})$

виконується нерівність: $\theta^k \leq \theta^{k+1}$, $k=1,2,\dots$. Згідно з теоремою 1 $\theta^k \leq \alpha_V^*(a)$. Тому існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k$ і

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k \leq \alpha_V^*(a). \quad (13)$$

Переконаємось, що послідовність $\{\alpha^k\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою послідовністю простору R^n . Припустимо супротивне. Тоді існує її підпослідовність $\{\alpha^{k_v}\}_{v=1}^\infty$ така, що $\lim_{v \rightarrow \infty} \|\alpha^{k_v}\| = +\infty$. Без обмеження загальності будемо вважати, що уже $\lim_{k \rightarrow \infty} \|\alpha^k\| = +\infty$.

Оскільки $(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k; \theta^k)$ є оптимальним розв'язком задачі (6), (7), то

$$\sum_{i=1}^n (-\alpha_i^k) f_j(g_i(s_j)) - \theta^k \leq p_{s_j}^*(f_j) - f_j(y_j), \quad j = \overline{1, m_1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Звідки

$$\sum_{i=1}^n \frac{-\alpha_i^k}{\|\alpha^k\|} f_j(g_i(s_j)) - \frac{1}{\|\alpha^k\|} \theta^k \leq \frac{1}{\|\alpha^k\|} p_{s_j}^*(f_j) - \frac{1}{\|\alpha^k\|} f_j(y_j), \quad (14)$$

$$j = \overline{1, m_1}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Оскільки $\left(-\frac{\alpha_1^k}{\|\alpha^k\|}, \dots, -\frac{\alpha_n^k}{\|\alpha^k\|}\right) \in S_{R^n}$, то з послідовності

$$\left\{ \left(-\frac{\alpha_1^k}{\|\alpha^k\|}, \dots, -\frac{\alpha_n^k}{\|\alpha^k\|} \right) \right\}_{k=1}^\infty$$

можна вибрати збіжну підпослідовність

$$\left\{ \left(-\frac{\alpha_1^{k_v}}{\|\alpha^{k_v}\|}, \dots, -\frac{\alpha_n^{k_v}}{\|\alpha^{k_v}\|} \right) \right\}_{v=1}^\infty.$$

Нехай

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \left(-\frac{\alpha_1^{k_v}}{\|\alpha^{k_v}\|}, \dots, -\frac{\alpha_n^{k_v}}{\|\alpha^{k_v}\|} \right) = (\alpha'_1, \dots, \alpha'_n).$$

Зрозуміло, що $(\alpha'_1, \dots, \alpha'_n) \in S_{R^n}$.

З урахуванням зазначеного вище, обмеженості послідовності $\{\theta^k\}_{k=1}^\infty$ (існує $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k$) з (14) одержимо, що

$$\max_{1 \leq j \leq m_1} \sum_{i=1}^n \alpha'_i f_j(-g_i(s_j)) \leq 0,$$

що суперечить (4).

Отже, $\{\alpha^k\}_{k=1}^\infty$ є обмеженою послідовністю простору R^n .

Нехай $\alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ її часткова границя.

Переконаємося, що вектор $g^* = \sum_{i=1}^n \alpha_i^* g_i$ є екстремальним елементом для величини (1). Існує підпослідовність $\{\alpha^{k_v}\}_{v=1}^\infty$ послідовності

$\{\alpha^k\}_{k=1}^\infty$ така, що

$$\lim_{v \rightarrow \infty} \alpha^{k_v} = \lim_{v \rightarrow \infty} (\alpha_1^{k_v}, \dots, \alpha_n^{k_v}) = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*) = \alpha^*.$$

До обмежень задачі лінійного програмування типу (6), (7), яка розв'язана на кроці k_v , додається обмеження

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i f_{m_1+k_v}(g_i(s_{m_1+k_v})) + \theta \geq f_{m_1+k_v}(y_{m_1+k_v}) - P_{s_{m_1+k_v}}^*(f_{m_1+k_v}),$$

де точки $s_{m_1+k_v} \in S$, $y_{m_1+k_v} \in a(s_{m_1+k_v})$ вибрані так, що

$$\begin{aligned} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s(y - g^{k_v}(s)) &= \max_{y \in a(s_{m_1+k_v})} p_{s_{m_1+k_v}}(y - g^{k_v}(s_{m_1+k_v})) = \\ &= p_{s_{m_1+k_v}}(y_{m_1+k_v} - g^{k_v}(s_{m_1+k_v})), \end{aligned} \quad (15)$$

а $f_{m_1+k_v} \in \partial p_{s_{m_1+k_v}}(y_{m_1+k_v} - g^{k_v}(s_{m_1+k_v}))$,

$$P_{s_{m_1+k_v}}^*(f_{m_1+k_v}) = f_{m_1+k_v}(y_{m_1+k_v} - g^{k_v}(s_{m_1+k_v})) - p_{s_{m_1+k_v}}(y_{m_1+k_v} - g^{k_v}(s_{m_1+k_v})).$$

Тому уже

$$\sum_{i=1}^n \alpha_i^{k_{v+1}} f_{m_1+k_v}(g_i(s_{m_1+k_v})) + \theta^{k_{v+1}} \geq f_{m_1+k_v}(y_{m_1+k_v}) - P_{s_{m_1+k_v}}^*(f_{m_1+k_v}). \quad (16)$$

Маємо далі з урахуванням (15), (16), що

$$\begin{aligned} & \left| \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s \left(y - g^{k_v}(s) \right) - \right. \\ & \left. - \left(f_{m_1+k_v} \left(y_{m_1+k_v} \right) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^{k_{v+1}} f_{m_1+k_v} \left(g_i \left(s_{m_1+k_v} \right) \right) - P_{s_{m_1+k_v}}^* \left(f_{m_1+k_v} \right) \right) \right| = \\ & = \left| f_{m_1+k_v} \left(y_{m_1+k_v} \right) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^{k_v} g_i \left(s_{m_1+k_v} \right) \right| - P_{s_{m_1+k_v}}^* \left(f_{m_1+k_v} \right) - \\ & - \left(f_{m_1+k_v} \left(y_{m_1+k_v} \right) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^{k_{v+1}} f_{m_1+k_v} \left(g_i \left(s_{m_1+k_v} \right) \right) - P_{s_{m_1+k_v}}^* \left(f_{m_1+k_v} \right) \right) \leq \\ & \leq \sum_{i=1}^n \left| \alpha_i^{k_{v+1}} - \alpha_i^{k_v} \right| \left\| f_{m_1+k_v} \right\| \left\| g_i \left(s_{m_1+k_v} \right) \right\| \leq l \sum_{i=1}^n \left| \alpha_i^{k_{v+1}} - \alpha_i^{k_v} \right| \left\| g_i \right\|. \end{aligned}$$

Оскільки $\lim_{v \rightarrow \infty} (\alpha_1^{k_v}, \dots, \alpha_n^{k_v}) = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$, то звідси, співвідношення (13) та наслідку 1 випливає, що

$$\begin{aligned} \lim_{v \rightarrow \infty} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s \left(y - g^{k_v}(s) \right) &= \lim_{v \rightarrow \infty} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s \left(y - \sum_{i=1}^n \alpha_i^{k_v} g_i(s) \right) = \\ &= \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s \left(y - \sum_{i=1}^n \alpha_i^* g_i(s) \right) = \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s \left(y - g^*(s) \right) = \\ &= \lim_{v \rightarrow \infty} \left(f_{m_1+k_v} \left(y_{m_1+k_v} \right) - \sum_{i=1}^n \alpha_i^{k_{v+1}} f_{m_1+k_v} \left(g_i \left(s_{m_1+k_v} \right) \right) - P_{s_{m_1+k_v}}^* \left(f_{m_1+k_v} \right) \right) \leq \\ &\leq \lim_{v \rightarrow \infty} \theta^{k_{v+1}} \leq \alpha_V^*(a). \end{aligned}$$

Отже,

$$\alpha_V^*(a) \leq \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s \left(y - g^*(s) \right) \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k \leq \alpha_V^*(a).$$

Звідси робимо висновок, що

$$\max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} p_s \left(y - g^*(s) \right) = \alpha_V^*(a) = \lim_{k \rightarrow \infty} \theta^k. \quad (17)$$

Це означає, що g^* є екстремальним елементом для величини (1). Оскільки рівність (17) має місце для будь-якої граничної точки $\alpha^* = (\alpha_1^*, \dots, \alpha_n^*)$ послідовності $\left\{ \alpha^k \right\}_{k=1}^{\infty} = \left\{ (\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k) \right\}_{k=1}^{\infty}$, то справедлива рівність (12).

Теорему доведено.

З доведеної теореми випливає, що оцінки (9) можна використати для відшукування величини (1) з наперед заданою точністю.

Крім того, з теореми 2 випливає, що умова (4) ((5)) є достатньою для існування екстремального елемента для величини (1).

Задача найкращої зваженої рівномірної апроксимації компактзначного відображення скінченновимірним підпростором.

Нехай $\omega(s)$, $s \in S$ — задана на S неперервна дійснозначна функція така, що $\omega(s) > 0$ для всіх $s \in S$ (деяка вагова функція).

Покладемо для $s \in S$ $p_s(x) = \omega(s)\|x\|$, $x \in X$. Зрозуміло, що $p_s, s \in S$, є опуклими на X ліпшіцевими з константою $l = \max_{s \in S} \omega(s)$ функціями, для яких відображення $s \in S \rightarrow p_s(x) = \omega(s)\|x\|$ є неперервними на S при кожному $x \in X$.

З урахуванням цього можна зробити висновок, що задача відшукування

$$\inf_{g \in V} \max_{s \in S} \max_{y \in a(s)} \omega(s)\|y - g(s)\| \quad (18)$$

вкладається у схему постановки задачі відшукування величини (1).

Легко переконатися, що для сім'ї $\{p_s\}_{s \in S}$ функцій p_s , $s \in S$, таких, що $p_s(x) = \omega(s)\|x\|$, $x \in X$, існують точки $s_j \in S$, функціонали $f_j \in \text{dom } p_{s_j}^*$, $j = \overline{1, m_1}$, для яких виконується умова (4). Тому для відшукування величини (18) та її екстремального елемента можна використати описаний вище чисельний метод.

Задачу відшукування величини (18) будемо називати задачею найкращої зваженої рівномірної апроксимації компактзначного відображення $a \in \tilde{C}(S, K(X))$ скінченновимірним підпростором V .

Висновки. Побудовано чисельний метод розв'язування задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих ліпшіцевих функцій рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактзначного відображення скінченновимірним підпростором.

Отримано двосторонні оцінки, які дозволяють знайти величину найкращого наближення з наперед заданою точністю.

Обґрунтовано, що побудований метод можна використати, зокрема, для розв'язування задачі найкращої зваженої рівномірної апроксимації півнеперервного зверху компактзначного відображення скінченновимірним підпростором.

Список використаних джерел:

1. Kelly J. E. The «Cutting plane» methods for solving convex programs / J. E. Kelly // SIAM J. — 1960. — Vol. 8, № 4. — P. 703–712.

2. Сендов Б. Хаусдорфовы приближения / Б. Сендов. — София : БАН, 1979. — 372 с.
3. Никольский М. С. Аппроксимация выпуклозначных непрерывных многозначных отображений / М. С. Никольский // Докл. АН СССР. — 1989. — Вып. 308, № 5. — С. 1047–1050.
4. Никольский М. С. Об аппроксимации непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображениями / М. С. Никольский // Вест. Моск. ун-та. Сер. Вычислит. математика и кибернетика. — 1990. — № 1. — С. 76–80.
5. Чобан М. М. Теорема Стоуна-Вейерштрасса и аппроксимации выпуклозначных непрерывных многозначных отображений / М. М. Чобан, Д. М. Ипате // Изв. АН Респ. Молдова. Мат. — 1981. — № 2. — С. 13–18.
6. Дудов С. И. О приближении непрерывного многозначного отображения постоянными многозначными отображения с шаровыми образами / С. И. Дудов, А. Б. Коноплев // Мат. заметки. — 2007. — Вып. 82, № 4. — С. 525–529.
7. Выгодчикова И. Ю. О наилучшем приближении непрерывного многозначного отображения алгебраическим полиномом / И. Ю. Выгодчикова // Математика. Механика : сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Саратов. ун-та. — 2000. — № 2. — С. 13–15.
8. Гудима У. В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У. В. Гудима // Укр. мат. журн. — 2005. — Вып. 57, № 12. — С. 1601–1619.
9. Дудов С. И. Критерий решения задачи наилучшего приближения сегментной функции полиномиальной полосой / С. И. Дудов, Е. В. Сорина // Математика. Механика : сб. науч. тр. — Саратов : Изд-во Саратов. ун-та. — 2008. — № 10. — С. 20–23.
10. Арестов В. В. Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи / В. В. Арестов // Тр. МИАН СССР. — 1989. — Вып. 189. — С. 3–20.
11. Магарил-Ильяев Г. Г. Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным / Г. Г. Магарил-Ильяев, К. Ю. Осипенко // Матем. заметки. — 1991. — Вып. 50, № 6. — С. 85–93.
12. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. — М. : Мир, 1975. — 496 с.
13. Иоффе А. Д. Теория экстремальных задач / А. Д. Иоффе, В. М. Тихомиров. — М. : Наука, 1974. — 480 с.
14. Юдин Д. Б. Линейное программирование (теория и конечные методы) / Д. Б. Юдин, Е. Г. Гольштейн. — М. : Физматгиз, 1963. — 774 с.

We generalized the method of cutting planes for the problem of the best at sense of the family convex lipschitz functions uniform approximation of compact-valued maps by finite dimensional space of continuous single-valued maps.

Key words: *the compact-valued maps, the best at sense of the family convex lipschitz functions uniform approximation, the finite dimensional space, the weight function.*

Отримано: 06.03.2014

УДК 519.21

П. П. Горун, аспірант

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

**АСИМПТОТИЧНА ПОВЕДІНКА СТРИБКОВОЇ
ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ
В СХЕМІ ДИФУЗІЙНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ**

Для випадку залежної від зовнішнього середовища сингулярно збуреної функції регресії досліджено асимптотичну поведінку стрибкової процедури стохастичної оптимізації в марковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації. Показано, що генератор дифузійного процесу є гетерогенним в часі, а його флуктуації мають залежний від еволюції характер.

Ключові слова: *стрибковий марковський процес, стохастична оптимізація, асимптотична поведінка, дифузійна апроксимація.*

Вступ. Дослідження поведінки флуктуацій процедури стохастичної оптимізації (ПСО) дає оцінку швидкості її збіжності до точки екстремуму усередненої еволюційної системи. Така проблема виникає при використанні алгоритму фазового усереднення випадкових еволюцій [1], який базується на близькості вихідної та усередненої еволюційних систем [2]. Так, в [3–4] досліджено поведінку флуктуацій дифузійної еволюційної системи з марковськими перемиканнями (процедура стохастичної апроксимації), де функція швидкості має сингулярно збурений доданок з малим параметром серій.

Асимптотична поведінка процедури стохастичної оптимізації досліджувалась методом моментів, детально описаним у працях [5–7], а для загальніших випадків у працях [8–10] отримані інші граничні розподіли.

Варто відзначити важливість флуктуацій при встановленні швидкості збіжності дифузійної оптимізації еволюційних систем в схемі усереднення та при встановленні асимптотичної поведінки процедури стохастичної апроксимації [11].

Так, в роботі [2] розглядався випадок збурення, *залежного тільки від зовнішнього середовища*. У цій статті розглянуто стохастичну систему, в якій функція швидкості має *залежне від стану самої системи* сингулярне збурення по параметру серій.

Проблема збіжності дискретної ПСО була розглянута у праці [12], де встановлено достатні умови збіжності динамічної системи в марковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації при умові експоненційної стійкості усередненого дифузійного процесу.

При дослідженні асимптотичної поведінки стрибкової ПСО в схемі усереднення у роботі [13] було показано, що при деяких нормуваннях по

часу суттєво зменшується дисперсія ПСО, а математичне сподівання знайденого розв'язку стає ближчим до точки екстремуму u^* .

У цій статті використовуються отримані у попередніх працях результати з метою аналізу та дослідження асимптотичної поведінки стрибкової ПСО в схемі *дифузійної апроксимації*.

Крім того, введено додаткові параметри, використовуючи які, можна отримати різну (прогнозовану) поведінку флуктуацій на зростаючих інтервалах часу.

Асимптотика стрибкової ПСО при дифузійному збурненні.

Досліджується асимптотична поведінка стрибкової процедури стохастичної оптимізації у схемі серій в марковському середовищі в схемі дифузійної апроксимації. Для простоти викладення розглядається одновимірний випадок функції регресії, однак отримані результати аналогічно переносяться на багатовимірний випадок.

Стрибкова процедура стохастичної оптимізації (ПСО) у схемі дифузійної апроксимації в марковському середовищі із сингулярним збурненням функції регресії задається співвідношенням (покладемо $\sum_{n=0}^{-1} \alpha_n^\varepsilon \nabla_b C(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon) = 0$) [14]:

$$u^\varepsilon(t) = u + \sum_{n=0}^{\nu(t/\varepsilon^{1/\gamma})-1} \alpha_n^\varepsilon C^\varepsilon(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon), \quad u^\varepsilon(0) = u, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

де γ — показник нормування часу, ν — лічильний процес моментів відновлення марковського процесу (МП).

Для узагальнення отриманих результатів розглянемо наступні керуючі функції:

$$a(t) = \frac{a}{t^\alpha}, \quad a > 0, \quad b(t) = \frac{b}{t^\beta}, \quad b > 0,$$

де α, β такі, що забезпечують умови збіжності ПСО (1) (див. [12, Теорема 1]):

$$\sum_{t=0}^{\infty} a(t) = \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} a^2(t) < \infty, \quad \sum_{t=0}^{\infty} a(t)b(t) < \infty. \quad (2)$$

В ПСО (1) мають місце вкладеності:

$$u_n^\varepsilon = u(\tau_n^\varepsilon), \quad x_n^\varepsilon = x(\tau_n^\varepsilon), \quad \alpha_n^\varepsilon = a(\tau_n^\varepsilon), \quad \tau_n^\varepsilon = \tau_n / \varepsilon^{1/\gamma}, \quad n \geq 0,$$

де τ_n моменти марковського відновлення рівномірно ергодичного МП $x(t), t \geq 0$ в стандартному фазовому просторі (X, \mathcal{X}) .

Функція $C^\varepsilon(u; x) = \nabla_b C(u; x) + \varepsilon^{-c_0} C_0(u; x)$, $c_0 > 0$, $u \in R$, $x \in X$ задовільняє умови існування глобального розв'язку супроводжуючих систем:

$$\frac{du_x(t)}{dt} = C^\varepsilon(u_x(t); x), x \in X.$$

Під збіжністю стрибкової ПСО (1) мається на увазі збіжність з ймовірністю 1 до точки рівноваги u^* (не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $u^* = 0$) усередненої системи

$$\frac{du(t)}{dt} = C'(u(t)), C(u) = q \int_X \rho(dx) C(u; x). \quad (3)$$

Це означає, що виконується рівність

$$C'(u^*) = 0. \quad (4)$$

З (3)–(4) отримуємо умову балансу для збурення $C_0(u; x)$ процедури (1):

$$\tilde{\Pi} C_0(0; x) = 0, \quad (5)$$

де $\tilde{\Pi}$ — проектор, що визначається стаціонарним розподілом вкладеного ланцюга Маркова (ВЛМ) $x_n, n \geq 0$, тобто $\tilde{\Pi} \varphi(x) = \int_X \rho(dx) \varphi(x)$.

Зокрема, якщо $\tilde{N}_0 = C_0(u; x)$, то

$$\tilde{\Pi} C'_0(0; x) = 0. \quad (6)$$

Для функції регресії $C(u; \cdot) \in C^3(R)$ має місце представлення:

$$\begin{aligned} \nabla_b C(u; x) &= \frac{C(u+b; x) - C(u-b; x)}{2b} = \\ &= C'(0; x) + u C''(0; x) + \frac{1}{2} \left(u^2 + \frac{b^2}{3} \right) C'''(0; x) + o(u^2 + b^2), \end{aligned} \quad (7)$$

де $u = u(t), b = b(t)$. Аналогічно збурення $C_0(u; x) \in C^3(R)$ має представлення:

$$C_0(u; x) = C_0(0; x) + u C'_0(0; x) + \frac{u^2}{2} C''_0(0; x) + \frac{u^3}{6} C'''_0(0; x) + o(u^3). \quad (8)$$

З (4) та (7) маємо додаткову умову балансу для функції регресії:

$$\tilde{\Pi} C'(0, x) = 0. \quad (9)$$

Зауваження. Для дифузійного збурення

$$C_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^{-2c_0} \sum_{n=0}^{\nu(t/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^\varepsilon C_0(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon). \quad (10)$$

ПСО (1) має місце слабка збіжність процесів (див. [1])

$$C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \frac{a\rho q}{t^\alpha} w(t), \varepsilon \rightarrow 0,$$

де $w(t)$ — стандартний вінерівський процес [17, глава X, 46],

$$\rho^2 = 2 \int_X \pi(dx) q(x) C_0(x) R_0 q(x) C_0(x) - q \int_X \rho(dx) C_0^2(x). \quad (11)$$

Використовуючи (10), для ПСО (1) отримуємо представлення:

$$u^\varepsilon(t) = \tilde{u}^\varepsilon(t) + \varepsilon^{c_0} C_0^\varepsilon(t), \quad (12)$$

де $\tilde{u}^\varepsilon(t) = u_0 + \sum_{n=0}^{v(t/\varepsilon^{1/\gamma})-1} a_n^\varepsilon \nabla_b C(u_n^\varepsilon; x_n^\varepsilon)$.

Нормовані флуктуації ПСО (1) розглядаються у вигляді:

$$v^\varepsilon(t) = \frac{t^\gamma}{\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon(t). \quad (13)$$

Отже,

$$\tilde{u}^\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{t^\gamma} v^\varepsilon(t). \quad (14)$$

З (12) та (14) маємо:

$$u^\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon}{t^\gamma} \left(v^\varepsilon(t) + \varepsilon^{c_0-1} t^\gamma C_0^\varepsilon(t) \right), \quad (15)$$

звідки для (13) маємо:

$$v^\varepsilon(t) = t^\gamma \left(\frac{u^\varepsilon(t)}{\varepsilon} - \varepsilon^{c_0} C_0^\varepsilon(t) \right). \quad (16)$$

Для скорочення записів введемо позначення:

$$z = v + \varepsilon^{c_0-1} t^\gamma w. \quad (17)$$

Розглянемо трьохкомпонентний МП

$$\left(v^\varepsilon(t), C_0^\varepsilon(t), x_t^\varepsilon = x(t / \varepsilon^{1/\gamma}), t \geq 0 \right). \quad (18)$$

Оскільки при асимптотичному аналізі флуктуацій ключовим кроком є асимптотичне представлення генератора МП (18), то побудуємо його та розглянемо основні його властивості.

Лема 1. Генератор МП (18) на тест-функціях $\varphi(v; \cdot; \cdot) \in C^2(P)$ має представлення

$$L_t^\varepsilon \varphi(v; w; x) = \varepsilon^{-1/\gamma} Q \varphi(\cdot; \cdot; x) + \varepsilon^{-1/\gamma} L_0^\varepsilon \varphi(v; w; x), \quad (19)$$

де

$$L_0^\varepsilon \varphi(v; w; x) = q(x) P \left[\varphi \left(v + \varepsilon^{\alpha/\gamma-1} t^{\gamma-\alpha} a \nabla_b C \left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} z; x \right); \right. \right. \\ \left. \left. w + \varepsilon^{\alpha/\gamma-2c_0} t^{-\alpha} a C_0 \left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} z; x \right); y \right) - \varphi(v; w; y) \right] + \varepsilon^{1/\gamma} \frac{\gamma}{t} v \varphi'_v(v; w; x), \quad (20)$$

$$P\varphi(\cdot; \cdot; y) = \int_X P(y, d\rho)\varphi(\cdot; \cdot; \rho).$$

Доведення. Проведемо доведення леми у два етапи.

Етап I. Знайдемо умовне математичне сподівання (покладемо $v^\varepsilon(t) = v$, $C_0^\varepsilon(t) = w$, $x_t^\varepsilon = x$, $\tau^\varepsilon(t) = t$):

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}\left[\varphi(v^\varepsilon(t+\Delta); C_0^\varepsilon(t+\Delta); x_{t+\Delta}^\varepsilon) \mid v, w, x\right] = \\ & = \mathbb{E}_{v,w,x}\left[\varphi\left(v + \Delta v^\varepsilon(t); w + \Delta C_0^\varepsilon(t); x_{t+\Delta}^\varepsilon\right)\right] \times \left[I\left(\theta_x > \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}\right) + I\left(\theta_x \leq \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}\right) \right]. \end{aligned}$$

$$\text{Оскільки } I\left(\theta_x > \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}\right) = e^{-\frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}q(x)} = 1 - \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}q(x) + O(\Delta^2), \quad \text{а}$$

$$I\left(\theta_x \leq \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}\right) = \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}q(x) + O(\Delta^2), \text{ маємо:}$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{v,w,x}\left[\varphi\left(v + \Delta v^\varepsilon(t); w + \Delta C_0^\varepsilon(t); x_{t+\Delta}^\varepsilon\right)\right] = \\ & = \varphi\left(v + \Delta v^\varepsilon(t); w + \Delta C_0^\varepsilon(t); x\right)\left(1 - \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}q(x)\right) + \\ & + \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}}q(x)\mathbb{E}_{v,w,x}\left[\varphi\left(v + \Delta v^\varepsilon(t); w + \Delta C_0^\varepsilon(t); y\right)\right] + O(\Delta^2), \end{aligned} \quad (21)$$

де $x_{t+\Delta}^\varepsilon = y$.

Знайдемо приріст $\Delta v^\varepsilon(t)$ нормованої ПСО (16) в момент стрибка при $\tau_n^\varepsilon = t$, $x_n = x$ та малих $\Delta > 0$, беручи до уваги розклад $(t+\Delta)^\gamma = t^\gamma + \gamma\Delta t^{\gamma-1} + O(\Delta^2)$ та використовуючи (13):

$$\begin{aligned} \Delta v^\varepsilon(t) & = v^\varepsilon(t+\Delta) - v^\varepsilon(t) = \\ & = \left(t^\gamma + \gamma\Delta t^{\gamma-1}\right) \frac{\tilde{u}^\varepsilon(t+\Delta)}{\varepsilon} - v^\varepsilon(t) + O(\Delta^2) = \\ & = \frac{t^\gamma}{\varepsilon} \tilde{u}^\varepsilon(t) + \gamma\Delta t^{\gamma-1} \frac{\tilde{u}^\varepsilon(t)}{\varepsilon} + \left(t^\gamma + \gamma\Delta t^{\gamma-1}\right) \frac{\Delta \tilde{u}^\varepsilon(t)}{\varepsilon} - v^\varepsilon(t) + O(\Delta^2) = \\ & = \frac{\gamma\Delta}{t} v + \varepsilon^{-1} \left(t^\gamma + \gamma\Delta t^{\gamma-1}\right) \Delta \tilde{u}^\varepsilon(t) + O(\Delta^2). \end{aligned} \quad (22)$$

Враховуючи, що приріст еволюції $\Delta \tilde{u}^\varepsilon(t)$ рівний

$$\Delta \tilde{u}^\varepsilon(t) = \tilde{u}^\varepsilon(t+\Delta) - \tilde{u}^\varepsilon(t) = \varepsilon^{\alpha/\gamma} \frac{a}{t^\gamma} \nabla_b C\left(u^\varepsilon(t); x_t^\varepsilon\right),$$

для останнього маємо:

$$\Delta v^\varepsilon(t) = \varepsilon^{\alpha/\gamma-1} t^{\gamma-\alpha} a \nabla_b C(u^\varepsilon(t); x_t^\varepsilon) + \\ + \gamma \frac{\Delta}{t} \left(v + \varepsilon^{\alpha/\gamma-1} t^{\gamma-\alpha} a \nabla_b C(u^\varepsilon(t); x_t^\varepsilon) \right) + O(\Delta^2).$$

Для першого доданку в (21) при $\Delta \rightarrow 0$, $\Delta \tilde{u}^\varepsilon(t) \rightarrow 0$ і $\Delta C_0^\varepsilon(t) \rightarrow 0$ (з умови Ліпшиця для $\nabla_b C(u; x)$), тому другим доданком в (22) нехтуємо:

$$E_{v,w,x} \left[\varphi \left(v + \Delta v^\varepsilon(t); w + \Delta C_0^\varepsilon(t); x_{t+\Delta}^\varepsilon \right) \right] = \varphi \left(v + \frac{\gamma \Delta}{t} v^\varepsilon(t); w; x \right) + \\ + \frac{\Delta}{\varepsilon^{1/\gamma}} q(x) \left[E_{v;w,x} \varphi \left(v + \Delta v^\varepsilon(t); w + \Delta C_0^\varepsilon(t); y \right) - \varphi \left(v + \frac{\gamma \Delta}{t} v^\varepsilon(t); w; x \right) \right] + O(\Delta^2).$$

Для приросту $\Delta C_0^\varepsilon(t)$ маємо представлення:

$$\Delta C_0^\varepsilon(t) = \varepsilon^{\alpha/\gamma-2c_0} \frac{a}{t^\alpha} C_0 \left(\frac{\varepsilon z}{t^\gamma}; x \right).$$

Нарешті з означення генератора МП (18) (див. наприклад, [16, Глава 3, 5]) отримуємо:

$$L_t^\varepsilon \varphi(v; w; x) = \\ = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Delta^{-1} E_{v,w,x} \left[\varphi(v + \Delta v^\varepsilon(t); w + \Delta C_0^\varepsilon(t); x_{t+\Delta}^\varepsilon) - \varphi(v; w; x) \right] = \\ = \varepsilon^{-1/\gamma} q(x) \left[E_{v;w,x} \varphi \left(v + \varepsilon^{\alpha/\gamma-1} t^{\gamma-\alpha} a \nabla_b C \left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} z; x \right); w + \right. \right. \\ \left. \left. + \varepsilon^{\alpha/\gamma-2c_0} t^{-\alpha} a C_0 \left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} z; x \right); y \right) - \varphi(v; w; x) \right] + \frac{\gamma}{t} v \varphi'_v(v; w; x), \quad (23)$$

де z визначено в (17).

Еман II. Представлення (19) отримуємо використовуючи доданок $\pm \varphi(v; w; y)$ в квадратних дужках в (23).

Перш, ніж продовжити, розглянемо розклад тест-функції $\varphi(v; w; \cdot) \in C^{3,4}(P \times P)$ з (20) та оцінимо кожен з її доданків відносно ε при різних значеннях параметрів α, γ, c_0 , відкидаючи усі, менші $O(\varepsilon^2)$:

$$\varphi(v + \Delta_1; w + \Delta_2; x) = \varphi + \Delta_2 \varphi'_w + \frac{\Delta_2^2}{2} \varphi''_w + \frac{\Delta_2^3}{6} \varphi'''_w + \frac{\Delta_2^4}{24} \varphi^{(IV)}_w + \\ + \Delta_1 \Delta_2 \varphi''_{vw} + \frac{\Delta_1 \Delta_2^2}{2} \varphi'''_{vww} + O(\Delta_1 \Delta_2^3) + \Delta_1 \varphi'_v + \frac{\Delta_1^2}{2} \varphi''_v + \frac{\Delta_1^3}{6} \varphi'''_v + O(\Delta_2^5), \quad (24)$$

де $\varphi = \varphi(v; w; x)$; $\Delta_1 = \varepsilon^{\alpha/\gamma-1} t^{\gamma-\alpha} a \nabla_b C \left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} z; x \right)$;

$$\Delta_2 = \varepsilon^{\alpha/\gamma - 2c_0} t^{-\alpha} a C_0 \left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} z; x \right). \quad (25)$$

Випадок $\alpha = 1, \gamma = 1/4, c_0 = 1$ (класичний). Враховуючи, що в (20) перед $\varphi(v; w; x)$ стоїть множник $\varepsilon^{-1/\gamma}$, маємо:

- $\varepsilon^{-1/\gamma} \Delta_1^2 = \varepsilon^{\frac{2\alpha-1}{\gamma}-2} = \varepsilon^2$, тобто доданками з $O(\Delta_1^2)$ можна нехтувати;
- $\varepsilon^{-1/\gamma} \Delta_2^3 = \varepsilon^{\frac{3\alpha-1}{\gamma}-6c_0} = \varepsilon^2$, тобто доданками з $O(\Delta_2^3)$ можна нехтувати;
- $\varepsilon^{-1/\gamma} \Delta_1 \Delta_2 = \varepsilon^{\frac{2\alpha-1}{\gamma}-2c_0-1} = \varepsilon$, тобто доданками з $O(\Delta_1 \Delta_2)$ можна нехтувати.

Таким чином, для даного випадку функція $\varphi(v; w; \cdot) \in C^{1,2}(P \times P)$ матиме розклад:

$$\varphi(v + \Delta_1; w + \Delta_2; x) = \varphi + \Delta_1 \varphi'_v + \Delta_2 \varphi'_w + \frac{\Delta_2^2}{2} \varphi''_w + O(\Delta_1^2 \Delta_2^2). \quad (26)$$

Зауваження. Якщо $c_0 < 1$, то: $\varepsilon^{-1/\gamma} \Delta_2^2 = \varepsilon^{4(1-c_0)}$, тому доданками з $O(\Delta_2^2)$ можна нехтувати, а $\varphi(v; w; \cdot) \in C^{2,2}(P \times P)$ матиме розклад:

$$\varphi(v + \Delta_1; w + \Delta_2; x) = \varphi + \Delta_1 \varphi'_v + \Delta_2 \varphi'_w + O(\Delta_2^2). \quad (27)$$

Відповідно до розкладу (7) для $\nabla_b C \left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} z; x \right)$ матимемо розклад:

$$\begin{aligned} \nabla_b C \left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} z; x \right) &= C'(0; x) + \frac{\varepsilon}{t^\gamma} z C''(0; x) + \\ &+ \frac{1}{2} \left(\frac{\varepsilon^2}{t^{2\gamma}} z^2 + \frac{\varepsilon^{2\beta/\gamma} b^2}{2t^{2\beta}} \right) C'''(0; x) + O \left(\frac{\varepsilon^{2\beta/\gamma+1}}{t^{\gamma+2\beta}} \right), \end{aligned} \quad (28)$$

де $b = const$.

Аналогічно до (8) збурення $C_0 \left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} z; x \right)$ можна представити наступним чином:

$$\begin{aligned} C_0 \left(\frac{\varepsilon}{t^\gamma} z; x \right) &= C_0(0; x) + \frac{\varepsilon}{t^\gamma} z C'_0(0; x) + \\ &+ \frac{\varepsilon^2}{2t^{2\gamma}} z^2 C''_0(0; x) + \frac{\varepsilon^3}{6t^{3\gamma}} z^3 C'''_0(0; x) + O \left(\frac{\varepsilon^4}{t^{4\gamma}} \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Для зручності та скорочення записів покладемо $\varphi = \varphi(v; w; x)$.
Перейдемо до формулювання леми.

Лема 2. ($\alpha = 1, \gamma = 1/4, c_0 = 1$) Генератор МП (18) на тест-функціях $\varphi(v; w) \in C^{1,2}(P \times P)$ має асимптотичне представлення:

$$L_t^\varepsilon \varphi(v; w; x) = \left[\varepsilon^{-4} Q + \frac{\varepsilon^{-2}}{t} q(x) Q_1(x) P + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{3/4}} q(x) Q_2(x) P + \frac{1}{t} q(x) Q_3(x) P + \theta_t^\varepsilon(x) Q_0 \right] \varphi(v; w; x), \quad (30)$$

де

$$Q_1(x) \varphi(v; w; x) = a C_0(0; x) \varphi'_w; \quad (31)$$

$$Q_2(x) \varphi(v; w; x) = a \left(C'(0; x) \varphi'_v + \frac{v + t^{1/4} w}{t^{2/4}} C'_0(0; x) \varphi'_w \right); \quad (32)$$

$$Q_3(x) \varphi(v; w; x) = a \left[(v + t^{1/4} w) C''(0; x) \varphi'_v + \frac{(v + t^{1/4} w)^2}{2t^{2/4}} C''_0(0; x) \varphi'_w \right] + \quad (33)$$

$$+ \frac{v}{4} \varphi'_v + \frac{a^2}{2t} C_0^2(0; x) \varphi''_w;$$

$$Q_0 \varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy) \varphi(y), \quad (34)$$

а залишковий член $\theta_t^\varepsilon(x) Q_0$ такий, що

$$\Pi \theta_t^\varepsilon(\cdot) Q_0 \varphi(v; w; \cdot) \Pi \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

Доведення. Підставивши (28) у (20) та врахувавши розклад (26), отримаємо представлення (30).

Наслідок ($\alpha = 1, \gamma = 1/4, c_0 = 1/2$). Генератор МП (18) на тест-функціях $\varphi(v; w; \cdot) \in C^{1,1}(P \times P)$ має асимптотичне представлення:

$$L_t^\varepsilon \varphi(v; w; x) = \left[\varepsilon^{-4} Q + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{3/4}} q(x) Q_1(x) P + \frac{\varepsilon^{-1/2}}{t^{3/4}} q(x) Q_2(x) P + \frac{1}{t} q(x) Q_3(x) P + \theta_t^\varepsilon(x) Q_0 \right] \varphi(v; w; x), \quad (36)$$

де

$$Q_1(x) \varphi(v; w; x) = a \left(C'(0; x) \varphi'_v + \frac{1}{t^{1/4}} C_0(0; x) \varphi'_w \right); \quad (37)$$

$$Q_2(x) \varphi(v; w; x) = a w \left(C''(0; x) \varphi'_v + \frac{1}{t^{1/4}} C'_0(0; x) \varphi'_w \right); \quad (38)$$

$$Q_3(x)\varphi(v; w; x) = av \left[(C''(0; x) + \frac{1}{4})\varphi'_v + \frac{1}{t^{1/4}} C'_0(0; x)\varphi'_w \right]; \quad (39)$$

$$Q_0\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy)\varphi(y), \quad (40)$$

а залишковий член $\theta_t^\varepsilon(x)Q_0$ такий, що

$$\Pi\theta_t^\varepsilon(\cdot)Q_0\varphi(v; w; \cdot)\Pi \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0, t \rightarrow \infty.$$

Доведення. З (35) та (27) отримуємо представлення (36).

Проблема сингулярного збурення. Щоб завершити побудову граничного оператора, розв'яжемо проблему сингулярного збурення (ПСЗ). Для цього розглянемо розклад оператора L_t^ε з (30) на збурених функціях вигляду

$$\varphi^\varepsilon(v; w; x) = \varphi(v; w) + \frac{\varepsilon^2}{t} \varphi_2(v; w; x) + \frac{\varepsilon^3}{t^{3/4}} \varphi_3(v; w; x) + \varepsilon^4 \varphi_4(v; w; x). \quad (41)$$

Як і раніше, для зручності записів покладемо $\varphi = \varphi(v; w)$, $\varphi_i = \varphi_i(v; w; x)$, $i = 2, 4$.

Лема 3. Розв'язок ПСЗ для оператора L_t^ε (30) на тест-функціях $\varphi(v; w; \cdot) \in C^{1,2}(P \times P)$ має вигляд:

$$L_t^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v; w; x) = \frac{1}{t} L_t \varphi(v) + \theta_t^\varepsilon(x) \varphi(v; w), \quad (42)$$

де оператор L_t діє за правилом

$$L_t \varphi(v; w) = q \left[(-kv - ad_1 t^{1/4} w) \varphi'_v - \frac{(v + t^{1/4} w)^2}{2t^{2/4}} d_2 \varphi'_w \right] + \frac{a^2 \rho^2}{2t} \varphi''_w, \quad (43)$$

де $d_1 = -q \int_X \rho(dx) C''(0; x)$, $d_2 = -q \int_X \rho(dx) C'_0(0; x)$, $k = ad_1 - \gamma$, а залишковий член $\theta_t^\varepsilon(x)\varphi(v; w)$ такий, що $\Pi\theta_t^\varepsilon(\cdot)\varphi(v; w)\Pi \rightarrow 0$, $\varepsilon \rightarrow 0$.

Доведення. Відомо (див. [2, підрозділ 3.1] або [1]), що залишковий член в представленні (30) не впливає на розв'язок ПСЗ. Тому для отримання (42) достатньо розглянути розв'язок ПСЗ тільки для зрізаного до L_t^ε оператора $L_{t_0}^\varepsilon$, тобто:

$$L_{t_0}^\varepsilon = \varepsilon^{-4} Q + \frac{\varepsilon^{-2}}{t} q(x) Q_1(x) P + \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{3/4}} q(x) Q_2(x) P + \frac{1}{t} q(x) Q_3(x) P.$$

Тоді значення оператора $L_{t_0}^\varepsilon$ на збурених функціях (45) має представлення

$$\begin{aligned}
 L_t^\varepsilon \varphi^\varepsilon(v; w; x) &= \varepsilon^{-4} Q\varphi + \frac{\varepsilon^{-2}}{t} [Q\varphi_2 + q(x)Q_1(x)P\varphi] + \\
 &+ \frac{\varepsilon^{-1}}{t^{3/4}} [Q\varphi_3 + q(x)Q_2(x)P\varphi] + \\
 &+ \frac{1}{t} [Q\varphi_4 + \frac{1}{t} q(x)Q_1(x)P\varphi_2 + q(x)Q_3(x)P\varphi] + \theta_{t_0}^\varepsilon(x),
 \end{aligned} \tag{44}$$

де

$$\begin{aligned}
 \theta_{t_0}^\varepsilon(x) &= \frac{\varepsilon}{t^2} q(x) \left[t^{1/4} (Q_1(x)P\varphi_3 + Q_2(x)P\varphi_2) + \varepsilon(Q_1(x)P\varphi_4 + Q_3(x)P\varphi_2 + \right. \\
 &+ t^{2/4} Q_2(x)P\varphi_3) + \varepsilon^2 t^{1/4} (Q_2(x)P\varphi_4 + Q_3(x)P\varphi_3) + \varepsilon^3 Q_3(x)P\varphi_4]; \\
 &|\theta_{t_0}^\varepsilon(\cdot)\varphi(v; w; \cdot)| \rightarrow 0, \varepsilon \rightarrow 0.
 \end{aligned}$$

а) з умови розв'язності ПСЗ (44) (див. наприклад, [2, Підрозділ 3.1]) $Q\varphi_2 + q(x)Q_1(x)\varphi = 0$ та умови балансу (5) знайдемо значення φ_2 :

$$\varphi_2(v; w; x) = R_0 q(x) Q_1(x) \varphi(v; w) = a R_0 q(x) C_0(0; x) \varphi'_w(v; w). \tag{45}$$

б) аналогічно з умови розв'язності

$$Q\varphi_3 + q(x)Q_2(x)\varphi = 0$$

та умов балансу (6), (8) маємо:

$$\begin{aligned}
 \varphi_3(v; w; x) &= R_0 q(x) Q_2(x) \varphi(v; w) = \\
 &= a R_0 q(x) \left(C'_0(0; x) \varphi'_v(v; w) + \frac{v + t^{1/4} w}{t^{2/4}} C'_0(0; x) \varphi'_w(v; w) \right).
 \end{aligned} \tag{46}$$

в) нарешті, з умови розв'язності (44) маємо:

$$Q\varphi_4 + \frac{1}{t} q(x) Q_1(x) P\varphi_2 + q(x) Q_3(x) \varphi = L_t \varphi(v; w),$$

де оператор L_t такий, що

$$L_t \Pi \varphi(v; w) = \Pi L_t(x) \Pi \varphi(v; w), \tag{47}$$

а

$$L_t \varphi(v; w) = \frac{1}{t} q(x) Q_1(x) P R_0 q(x) Q_1(x) \varphi + q(x) Q_3(x) \varphi. \tag{48}$$

д) обчислимо тепер праву частину (47). Для цього використаємо знайдені представлення (48) та (45):

$$\begin{aligned}
 &L_t \Pi \varphi(v; w) = \\
 &= \frac{a^2}{t} \Pi q(x) C_0(0; x) P R_0 q(x) C_0(0; x) \Pi \varphi''_w(v; w) + \\
 &+ \Pi q(x) Q_3(x) \Pi \varphi(v; w).
 \end{aligned}$$

Тоді для першого доданку маємо:

$$\begin{aligned} & \Pi q(x)C_0(0;x)PR_0q(x)C_0(0;x)\Pi = \\ & = \int_X \pi(dx)\tilde{C}_0(0;x)R_0\tilde{C}_0(0;x) - q \int_X \rho(dx)C_0^2(0;x), \end{aligned} \quad (49)$$

де

$$\tilde{C}_0(0;x) = q(x)C_0(0;x).$$

А для другого отримуємо:

$$\begin{aligned} & \Pi q(x)Q_3(x)\Pi\varphi(v;w) = \\ & = q \left[a(v+t^{1/4}w) \int_X \rho(dx)C''(0;x)\varphi'_v + \frac{v}{4}\varphi'_v + \right. \\ & \left. + a \frac{(v+t^{1/4}w)^2}{2t^{2/4}} \int_X \rho(dx)C''_0(0;x)\varphi'_w \right] + \frac{a^2}{2t} q \int_X \rho(dx)C_0^2(0;x)\varphi''_w. \end{aligned} \quad (50)$$

Тепер з (49), (50)

$$\begin{aligned} L_t\Pi\varphi(v;w) = & q \left[\left[v \left(a \int_X \rho(dx)C'''(0;x) + \frac{1}{4} \right) + at^{1/4}w \int_X \rho(dx)C'''(0;x) \right] \varphi'_v + \right. \\ & \left. + \frac{(v+t^{1/4}w)^2}{2t^{2/4}} \int_X \rho(dx)C''_0(0;x)\varphi'_w \right] + \frac{a^2\rho^2}{2t}\varphi''_w, \end{aligned}$$

де ρ^2 має представлення (11).

Теорема. При виконанні умов збіжності ПСО (1), а також при додаткових умовах:

$$A1: \rho^2 > 0;$$

$$A2: d_1 > 0, d_2 > 0;$$

$$A3: k > 0$$

має місце слабка подвійна збіжність процесів:

$$(v^\varepsilon(t) \Rightarrow \zeta(t), C_0^\varepsilon(t) \Rightarrow \sigma(t)w(t), \varepsilon \rightarrow 0),$$

де $\sigma^2(t) = \frac{a^2\rho^2q^2}{t^2}$ в кожному скінченному інтервалі $0 < t_0 < t < T < \infty$.

Двокомпонентний граничний процес $(\zeta(t), \sigma(t)w(t), t > 0)$ є гетерогенним в часі дифузійним процесом (43).

Висновки. Досліджено асимптотичну поведінку стрибкової процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації в марковському середовищі для одновимірного випадку. Отримані результати аналогічно переносяться на багатовимірний випадок.

Показано, що генератор дифузійного процесу є гетерогенним в часі, а його флуктуації мають залежний від еволюції характер.

Введено додаткові параметри, використовуючи які, можна отримати різну (прогнозовану) поведінку флуктуацій на зростаючих інтервалах часу.

Отримані результати розширюють можливості дослідження флуктуацій еволюційних систем в околі точки екстремуму у випадку залежного від еволюції сингулярного збурення еволюційної системи. У свою чергу, це дає змогу поглибити аналіз флуктуацій процедури стохастичної оптимізації при дослідженні умов оптимізації стохастичних систем.

Список використаних джерел:

1. Korolyuk V. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V. Korolyuk, N. Limnios. — World Scientific Publishing, 2005. — 330 p.
2. Korolyuk V. S. Stochastic Models of Systems / V. S. Korolyuk, V. V. Korolyuk. — London : Kluwer acad. pub., 1999. — 185 p.
3. Chabaniuk Y. Fluctuation of stochastic systems with average equilibrium point / Y. Chabanuk, V. S. Koroliuk, N. Limnios // C.R. Acad. Sci. Ser. I. Paris. — 2007. — 345. — P. 405–410.
4. Чабанюк Я. М. Асимптотична нормальність стрибкової процедури з дифузійним збуренням в марковському середовищі / Я. М. Чабанюк // Таврійський вісник інформатики та кібернетики. — Сімферополь, 2007. — №1. — С. 40–48.
5. Sacks J. Asymptotic distributions of stochastic approximations / J. Sacks // Ann. Math. Statist. — 1958. — Vol. 2. — P. 373–405.
6. Невельсон М. Б. О сходимости моментов процедуры Роббинса-Монро / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский // Автоматика и телемеханика. — 1972. — №3 — С. 101–125.
7. Хасьминский Р. З. О поведении процессов стохастической аппроксимации для больших значений времени / Р. З. Хасьминский // Проблемы передачи информации. — 1972. — №1. — С. 453–495.
8. Fabian V. On asymptotic normality in stochastic approximation / V. Fabian // Annals of Mathematical Statistic. — 1968. — Vol. 39(4). — P. 1327–1332.
9. Kersting G. D. A weak convergence theorem with application to the Robbins-Monro process / G. D. Kersting // Ann. Prob., 1978. — Vol. 6. — P. 1015–1025.
10. Ljung L. Stochastic Approximation and optimization of random systems / L. Ljung, G. Pflug, H. Walk. — Basel ; Boston ; Berlin : Birkhuser, — 1992. — 114 p.
11. Чабанюк Я. М. Апроксимація дифузійним процесом в схемі усереднення / Я. М. Чабанюк // Доп. НАН України. — 2004. — №12. — С. 35–40.
12. Чабанюк Я. М. Збіжність дискретної процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації / Я. М. Чабанюк, П. П. Горун // Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки : збірник наукових праць. — Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. — 2012. — №6. — С. 234–248.

13. Чабанюк Я. М. Асимптотика стрибкової процедури стохастичної оптимізації в схемі усереднення / Я. М. Чабанюк, П. П. Горун // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. — 2012. — №2. — С. 251–256.
14. Горун П. П. Генератор стрибкової процедури оптимізації в марковському середовищі / П. П. Горун, Я. М. Чабанюк, В. Р. Кукурба // XVI International Conference «Problems of decision making under uncertainties» (PDMU-2010, October 4–8, 2010). — К. : Освіта України. — С. 54
15. Korolyuk V. S. Average and diffusion approximation for evolutionary systems in an asymptotic split phase space / V. S. Korolyuk, N. Limnios // Annals Appl. Probab. — 2004. — 14(1). — P. 489–516.
16. Невельсон М. Б. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1972. — 304 с.
17. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения : в 2-х т. / В. Феллер. — М. : Мир, 1967. — Т. 2. — 751 с.

In case depending on the environment singularly perturbed regression function the asymptotic behavior of stochastic optimization procedure in diffusion approximation scheme in Markov medium was investigated. It was shown that the generator of the diffusion process is heterogeneous in time and its fluctuations depends on the evolution.

Key words: *jumping markov process, stochastic optimization, asymptotic behavior, diffusion approximation.*

Отримано: 31.03.2014

УДК 517.929

А. Б. Дорош, асистент,
І. М. Черевко, д-р фіз.-мат. наук, професор
 Чернівецький національний університет
 імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ЗАСТОСУВАННЯ СПЛАЙН-ФУНКЦІЙ ДЛЯ АПРОКСИМАЦІЇ РОЗВ'ЯЗКІВ ЛІНІЙНИХ КРАЙОВИХ ЗАДАЧ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Досліджуються крайові задачі для лінійних диференціальних рівнянь із змінним запізненням. Запропоновано та обґрунтовано схему наближеного розв'язання крайової задачі за допомогою кубічних сплайнів дефекту два.

Ключові слова: *крайова задача, запізнення, сплайн-функції, ітераційний процес.*

Вступ. Диференціальні рівняння із запізненням виникають у багатьох областях математичного моделювання. Врахування запізнення дозволяє описати багато нових ефектів і явищ у біології, екології, імунології та інших науках. У зв'язку з відсутністю ефективних алго-

ритмів інтегрування диференціальних рівнянь із запізненням у явному вигляді важливого значення набувають дослідження наближених методів їх інтегрування.

У цій статті досліджується наближений метод розв'язання крайової задачі для лінійних диференціальних рівнянь зі змінним запізненням, що базується на апроксимації розв'язку кубічними сплайнами дефекту два.

Питання існування та єдиності розв'язків крайових задач із запізненням у різних функціональних просторах вивчались у [1–3] та інших. Зведення лінійної крайової задачі із запізненням до інтегрального рівняння і застосування до його розв'язання проєкційно-ітераційних методів розглянуто в [4]. Застосування методу сплайн-апроксимацій до диференціально-різницевих рівнянь досліджувалось у працях [5–7].

Позначення та постановка задачі. Розглянемо крайову задачу

$$y''(x) = p_1(x)y'(x) + q_1(x)y(x) + p_2(x)y'(x - \tau(x)) + q_2(x)y(x - \tau(x)) + f(x), \quad x \in [a; b], \quad (1)$$

$$y^{(j)}(x) = \varphi^{(j)}(x), \quad j = 0, 1, \quad x \in [a^*; a], \quad y(b) = \gamma, \quad (2)$$

де $p_i(x), q_i(x), i = 1, 2$ — неперервні на $[a; b]$ функції, $\varphi(x)$ — задана на $[a^*; a]$ неперервно-диференційовна функція, $\gamma \in \mathbb{R}$, $a^* = \min_{x \in [a; b]} (x - \tau(x))$.

Нехай запізнення $\tau(x) \geq 0$ — така неперервна на $[a; b]$ функція, що існує скінченна множина точок

$$E = \{x_i \in [a; b], x_i - \tau(x_i) = a, i = \overline{1, l}\}.$$

Введемо позначення $\delta_1 = [a, x_1], \delta_2 = [x_1, x_2], \dots, \delta_{l+1} = [x_l, b]$ та визначимо множину функцій

$$V = \left\{ y(x) : y(x) \in \left(C[a^*, b] \right) \cap \left(C^1[a^*, a] \cup C^1[a, b] \right) \left(\bigcup_{j=1}^{l+1} C^2[\delta_j] \right) \right\}. \quad (3)$$

Розв'язком крайової задачі (1)–(2) будемо вважати функцію $y = y(x)$, яка задовольняє рівняння (1) (за можливим винятком точок $x_i, i = \overline{1, l}$) та крайові умови (2). В подальшому будемо припускати, що існує розв'язок задачі (1)–(2), який належить V .

Обчислювальна схема. Задамо на $[a, b]$ сітку $\Delta: a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ так, щоб $E \subset \Delta$. Будемо шукати наближений розв'язок задачі (1)–(2) у вигляді інтерполяційного кубічного сплайну $S(y, x)$ дефекту 2 на сітці Δ , що належить простору функцій V .

Введемо позначення $h_j = x_j - x_{j-1}$, $j = 1, \dots, n$,

$$M_j^+ = S''(y, x_j + 0), j = 0, \dots, n-1, M_j^- = S''(y, x_j - 0), j = 1, \dots, n.$$

Для сплайну $S(y, x)$ нескладно одержати зображення:

$$S(y, x) = M_j^- \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + M_{j-1}^+ \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + \left(\frac{y_{j-1}}{h_j} - M_{j-1}^+ \frac{h_j}{6} \right) (x_j - x) + \left(\frac{y_j}{h_j} - M_j^- \frac{h_j}{6} \right) (x - x_{j-1}), x \in [x_{j-1}, x_j], j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Враховуючи неперервність похідної сплайну $S(y, x)$ у внутрішніх вузлах сітки Δ та крайові умови (2), одержуємо систему лінійних рівнянь, яку задовольняють величини M_j^+ і M_j^- :

$$h_{j+1}y_{j-1} - (h_j + h_{j+1})y_j + h_jy_{j+1} = \frac{h_j - h_{j+1}}{6}(h_jM_{j-1}^+ + 2h_jM_j^- + 2h_{j+1}M_j^+ + h_{j+1}M_{j+1}^-), j = 1, \dots, n-1, y_0 = \varphi(a), y_n = \gamma. \quad (5)$$

Із означення множини функцій V дістаємо, що $M_j^+ = M_j^-$ для $x_j \notin E$.

Наведемо властивості матриці A , що визначається коефіцієнтами в лівій частині системи (5).

Лема. Справджуються співвідношення

$$\det(A) = (-1)^{n-1} h_2 h_3 \dots h_{n-1} (b-a), \quad (6)$$

$$\|A^{-1}\| = \max_i \sum_{j=1}^{n-1} |a_{ij}^{-1}| \leq \frac{K^2}{8h^3} (b-a)^2, \quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^{n-1} |a_{ij}^{-1}| \leq \frac{K^2(b-a)}{2h^2}, i = \overline{1, n-1}, \max_{1 \leq i \leq n-2} \sum_{j=1}^{n-1} |a_{i+1,j}^{-1} - a_{ij}^{-1}| \leq \frac{K^2(b-a)}{2h^2}, \quad (8)$$

де a_{ij}^{-1} — елементи матриці A^{-1} , $K = \frac{H}{h}$, $h = \min_j h_j$, $H = \max_j h_j$.

Розглянемо тепер ітераційну схему знаходження наближеного розв'язку крайової задачі (1)–(2) у вигляді кубічних сплайнів дефекту два (4).

1. Вибираємо кубічний сплайн $S(y^{(0)}, x)$ довільним чином, щоб задовольнялись крайові умови (2) (наприклад, $S(y^{(0)}, x) = \frac{\gamma - \varphi(a)}{b-a}(x-a) + \varphi(a)$).

2. Використовуючи вихідне рівняння (1) та сплайн $S(y^{(0)}, x)$, знаходимо множини для $k = 0, 1, \dots$

$$M_j^{+(k+1)} = p_1(x_j)S'(y^{(k)}, x_j + 0) + q_1(x_j)S(y^{(k)}, x_j + 0) + t_j \left(p_2(x_j)S'(y^{(k)}, x_j + 0 - \tau(x_j)) + q_2(x_j)S(y^{(k)}, x_j + 0 - \tau(x_j)) \right) + f(x_j) + (1-t_j) \left(p_2(x_j)\varphi'(x_j - \tau(x_j)) + q_2(x_j)\varphi(x_j - \tau(x_j)) \right), j = \overline{0, n-1},$$

$$M_j^{-(k+1)} = p_1(x_j)S'(y^{(k)}, x_j - 0) + q_1(x_j)S(y^{(k)}, x_j - 0) + t_j \left(p_2(x_j)S'(y^{(k)}, x_j - 0 - \tau(x_j)) + q_2(x_j)S(y^{(k)}, x_j - 0 - \tau(x_j)) \right) + f(x_j) + (1-t_j) \left(p_2(x_j)\varphi'(x_j - \tau(x_j)) + q_2(x_j)\varphi(x_j - \tau(x_j)) \right), j = \overline{1, n},$$

$$\text{де } t_j = \begin{cases} 0, & x_j - \tau(x_j) < a, \\ 1, & x_j - \tau(x_j) \geq a. \end{cases}$$

3. Розв'язуючи систему рівнянь (5), знаходимо $y_j^{(k+1)}$, $j = \overline{0, n}$.

4. За множинами $\{y_j^{(k+1)}\}$, $\{M_j^+\}$, $\{M_j^-\}$ будуємо сплайн $S(y^{(k+1)}, x)$, який виступає в якості наступного наближення.

5. Продовжуючи ітераційний процес, одержуємо послідовність сплайнів $S(y^{(k)}, x)$, $k = 0, 1, \dots$. Якщо ця послідовність збігається до розв'язку задачі (1)–(2), то при достатньо великому k сплайн $S(y^{(k)}, x)$ буде апроксимацією шуканого розв'язку.

Збіжність ітераційного процесу. Введемо позначення

$$L_1 = \max_{x \in [a, b]} \left(|q_1(x)| + |q_2(x)| \right), L_2 = \max_{x \in [a, b]} \left(|p_1(x)| + |p_2(x)| \right),$$

$$u = \frac{H^2}{8} + \frac{K^5}{8}(b-a)^2, \quad v = \frac{2H}{3} + \frac{K^5(b-a)}{2}, \quad \mu = 5 \left(1 + L_2 H + \frac{1}{2} L_1 H \right).$$

Теорема. Нехай розв'язок крайової задачі (1)–(2) існує і належить простору V . Тоді при виконанні нерівності

$$\theta = uL_1 + vL_2 < 1 \quad (9)$$

існує $H^* > 0$, що для всіх $H < H^*$ послідовність $S(y^{(k)}, x)$, $k = 0, 1, \dots$

рівномірно збігається на $[a, b]$ і справджуються співвідношення

$$\left\| \lim_{k \rightarrow \infty} S^{(p)}(y^{(k)}, x) - y^{(p)}(x) \right\| \leq R_p \omega(y''(x), H), \quad p = 0, 1,$$

де $y(x)$ — розв'язок задачі (1)–(2), $R_0 = \frac{\mu u}{1-\theta} + \frac{5H^2}{2}$, $R_1 = \frac{\mu v}{1-\theta} + 5H$,

$$\omega(y''(x), H) = \max_{l \leq r \leq l} \omega_r(y''(x), H),$$

$\omega_r(y''(x), H)$ — модуль неперервності $y''(x)$ на δ_r .

Доведення. Згідно (6), побудова послідовності $S(y^{(k)}, x)$ можлива. Запишемо ітераційний алгоритм у матричній формі:

$$y^{(k+1)}(x) = \frac{A^{-1}B}{6} (P_1(x)S'(y^{(k)}, x) + Q_1(x)S(y^{(k)}, x) + \quad (10)$$

$$+ P_2(x)S'(y^{(k)}, x - \tau(x)) + Q_2(x)S(y^{(k)}, x - \tau(x)) + F(x) + A^{-1}d,$$

де P_1, Q_1, P_2, Q_2 — діагональні матриці з елементами $p_1(x), q_1(x), p_2(x), q_2(x)$ на діагоналі, F — вектор-стовпчик, d — сталий вектор, що залежить тільки від крайових умов (2).

Нехай $x \in [x_{j-1}, x_j]$, тоді, згідно (10), маємо

$$\begin{aligned} \left\| y_j^{(k+1)} - y_j^{(k)} \right\| &\leq \frac{1}{6} \left\| A^{-1} \right\| \left\| B \right\| \left(L_1 \left\| S(y^{(k)}, x) - S(y^{(k-1)}, x) \right\| + \right. \\ &\quad \left. + L_2 \left\| S'(y^{(k)}, x) - S'(y^{(k-1)}, x) \right\| \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Із рівності (4), враховуючи (11) та лему, дістаємо

$$\begin{aligned} \left\| S(y^{(k+1)}, x) - S(y^{(k)}, x) \right\| &\leq u \left(L_1 \left\| S(y^{(k)}, x) - S(y^{(k-1)}, x) \right\| + \right. \\ &\quad \left. + L_2 \left\| S'(y^{(k)}, x) - S'(y^{(k-1)}, x) \right\| \right), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \left\| S' \left(y^{(k+1)}, x \right) - S' \left(y^{(k)}, x \right) \right\| &\leq v \left(L_1 \left\| S \left(y^{(k)}, x \right) - S \left(y^{(k-1)}, x \right) \right\| + \right. \\ &\quad \left. + L_2 \left\| S' \left(y^{(k)}, x \right) - S' \left(y^{(k-1)}, x \right) \right\| \right). \end{aligned} \quad (13)$$

Введемо позначення

$$\alpha = L_1 \left\| S \left(y^{(1)}, x \right) - S \left(y^{(0)}, x \right) \right\| + L_2 \left\| S' \left(y^{(1)}, x \right) - S' \left(y^{(0)}, x \right) \right\|.$$

Ітеруючи нерівності (12) та (13), одержуємо

$$\begin{aligned} \left\| S \left(y^{(k+1)}, x \right) - S \left(y^{(k)}, x \right) \right\| &\leq \\ &\leq u \theta^{k-1} \alpha, \left\| S' \left(y^{(k+1)}, x \right) - S' \left(y^{(k)}, x \right) \right\| \leq v \theta^{k-1} \alpha. \end{aligned} \quad (14)$$

Співвідношення (14) при виконанні нерівності (9) забезпечують збіжність послідовностей $\left\{ S^{(p)} \left(y^{(k)}, x \right) \right\}$, $k = 0, 1, \dots$, $p = 0, 1$. Позначимо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S^{(p)} \left(y^{(k)}, x \right) = S^{(p)} \left(\bar{y}, x \right), \quad p = 0, 1.$$

Якщо $S(y, x)$ — кубічний сплайн дефекту 2, що інтерполює на сітці Δ розв'язок $y(x)$ крайової задачі (1)–(2), тоді

$$\begin{aligned} \left\| S^{(p)} \left(\bar{y}, x \right) - y^{(p)}(x) \right\| &\leq \left\| S^{(p)} \left(\bar{y}, x \right) - S^{(p)} \left(y, x \right) \right\| + \\ &\quad + \left\| S^{(p)} \left(y, x \right) - y^{(p)}(x) \right\|, \quad p = 0, 1. \end{aligned} \quad (15)$$

Для другого доданку в правій частині (15) справедлива оцінка [8]

$$\begin{aligned} \left\| S^{(p)} \left(y, x \right) - y^{(p)}(x) \right\| &\leq K_p H^{2-p} \omega \left(y'(x), H \right), \quad p = 0, 1, 2, \quad K_0 = \frac{5}{2}, \\ &\quad K_1 = K_2 = 5. \end{aligned} \quad (16)$$

Для оцінки перших доданків у (15) знайдемо допоміжні нерівності

$$\begin{aligned} &\left| M_j^+ - p_1(x_j) S'(y, x_j + 0) - q_1(x_j) S(y, x_j + 0) - \right. \\ &- p_2(x_j) S'(y, x_j + 0 - \tau(x_j)) - q_2(x_j) S(y, x_j + 0 - \tau(x_j)) - f(x_j) \left| \leq \right. \\ &\leq \left| S''(y, x_j + 0) - y''(x_j + 0) \right| + \left| p_1(x_j) \left(S'(y, x_j + 0) - y'(x_j + 0) \right) \right| + \\ &\quad + \left| q_1(x_j) \left(S(y, x_j + 0) - y(x_j + 0) \right) \right| + \\ &\quad + \left| p_2(x_j) \left(S'(y, x_j + 0 - \tau(x_j)) - y'(x_j + 0) \right) \right| + \end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned} & + \left| q_2(x_j) \left(S(y, x_j + 0 - \tau(x_j)) - y(x_j + 0) \right) \right| \leq \\ & \leq \left(5 + \frac{5}{2} L_1 H^2 + 5 L_2 H \right) \omega(y'', H) = \mu \omega(y'', H), j = \overline{0, n-1}. \end{aligned}$$

Аналогічно одержуємо

$$\begin{aligned} & |M_j^- - p_1(x_j) S'(y, x_j - 0) - q_1(x_j) S(y, x_j - 0) - \\ & - p_2(x_j) S'(y, x_j - 0 - \tau(x_j)) - q_2(x_j) S(y, x_j - 0 - \tau(x_j)) - f(x_j)| \leq \quad (18) \\ & \leq \mu \omega(y'', H), j = \overline{1, n}. \end{aligned}$$

Позначимо $\max_{a \leq x \leq b} |S^{(p)}(\bar{y}, x) - S^{(p)}(y, x)| = \beta_p, p = 0, 1.$

Враховуючи, що для сплайна $S(\bar{y}, x)$ має місце зображення вигляду (4), M_j^+, M_j^- задовольняють співвідношення (5) та нерівності (17)–(18), нескладно дістати систему нерівностей

$$\begin{cases} \beta_0 \leq u(L_1 \beta_0 + L_2 \beta_1 + \mu \omega(y'', H)), \\ \beta_1 \leq v(L_1 \beta_0 + L_2 \beta_1 + \mu \omega(y'', H)). \end{cases} \quad (19)$$

Розв'язуючи систему нерівностей (19), маємо

$$\beta_0 \leq \frac{u \mu \omega(y'', H)}{1 - (L_1 u + L_2 v)}, \beta_1 \leq \frac{v \mu \omega(y'', H)}{1 - (L_1 u + L_2 v)}. \quad (20)$$

Нерівності (20) разом із оцінками (9) та (16) забезпечують потрібні співвідношення

$$\begin{aligned} \|S(\bar{y}, x) - y(x)\| & \leq \left(\frac{u \mu}{1 - \theta} + \frac{5}{2} H^2 \right) \omega(y'', H), \\ \|S'(\bar{y}, x) - y'(x)\| & \leq \left(\frac{v \mu}{1 - \theta} + 5H \right) \omega(y'', H). \end{aligned}$$

Теорему доведено.

Приклад. Розглянемо крайову задачу

$$y'' - 4y'(x) + 4y(x) + xy \left(x - \frac{x}{2} \right) - x^2 + 8 = 0, x \in [1; 2],$$

$$y(x) = 2x, x \in [0, 5; 1], y(2) = 5e^2 - 2.$$

Точний розв'язок крайової задачі, знайдений методом кроків

$$y = e^{2x-2} (3+x) - 2.$$

Наближений розв'язок крайової задачі згідно дослідженої в роботі ітераційної схеми знайдено за допомогою прикладної програми, розробленої в середовищі MS Visual Studio 2010.

Результати обчислень наведено в таблиці 1, де y — точний розв'язок, z — наближений розв'язок, знайдений при $h = 0.025$ на 9-й ітерації, Δ — похибка. Порівнюючи точний і наближений розв'язки, одержуємо, що відносна похибка не перевищує 0.1%, а абсолютна — 0.01.

Таблиця 1

x	y	z	Δ
1.0	2.0	2.0	0.0
1.2	4.2693	4.2657	0.0036
1.4	7.8	7.7924	0.0076
1.6	13.2827	13.273	0.0097
1.8	21.7811	21.7746	0.0065
2.0	34.9453	34.9453	0.0

Висновки. Апарат сплайн-функцій дозволяє побудувати ефективні обчислювальні алгоритми розв'язання крайових задач із запізненням. Одержані достатні умови збіжності ітераційної схеми є коефіцієнтними, простими для перевірки. Числові експерименти підтверджують одержані теоретичні результати.

Список використаних джерел:

1. Grim L. J. Boundary value problems for delay differential equations / L. J. Grim, K. Schmitt // Bull. Amer. Math. Soc. — 1968. — Vol. 74, № 5. — P. 997–1000.
2. Каменский Г. А. Краевые задачи для нелинейного дифференциального уравнения с отклоняющимся аргументом нейтрального типа / Г. А. Каменский, А. Д. Мышкис // Дифференц. уравн. — 1972. — Т. 8, № 12. — С. 2171–2179.
3. Biga A. Existence, uniqueness and approximation for the solution of a second order neutral differential equation with delay in Banach spaces / A. Biga, R. Gaber // Mathematica. — 2007. — Vol. 49, № 2. — P. 117–130.
4. Лучка А. Ю. О краевой задаче для линейных дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом / А. Ю. Лучка // Дифференциально-функциональные и разностные уравнения. — К. : Ин-т математики АН УРСР, 1981. — С. 35–56.
5. Nikolova T. S. Application of spline-functions for the construction of an approximate solution of boundary problems for a class of functional-differential equations / T. S. Nikolova, D. D. Bainov // Yokohama Math. J. — 1981. — Vol. 29, № 1. — P. 108–122.
6. Настасьева Н. П. Кубічні сплайни дефекту 2 та їх застосування до крайових задач / Н. П. Настасьева, І. М. Черевко // Вісник Київського університету. Серія: Фізико-математичні науки. — 1999. — Вип. 1. — С. 69–73.
7. Cherevko I. Solving boundary value problems for neutral delay integro-differential equations using spline functions / I. Cherevko, A. Dorosh // Actual

- problems of training specialists in ICT. Conference Proceedings. — Sumy : Sumy State University, 2013. — Part 2. — P. 226–234.
8. Завялов Ю. С. Методы сплайн-функций / Ю. С. Завялов, В. И. Квасов, В. Л. Мирошниченко. — М. : Наука, 1980. — 352 с.

The boundary value problem for differential equation with delay is researched. Iterative scheme of finding the solution using interpolating cubic spline with defect two is constructed and explained. Numerical experiments are conducted for test boundary value problems.

Key words: *differential equations, delay, boundary value problem, approximation, spline-functions.*

Отримано: 18.02.2014

УДК 517.956.4

Т. О. Заболотько, аспірант,
С. Д. Івасишен, д-р фіз.-мат. наук, професор
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут», м. Київ

ПОВНЕ АНАЛІТИЧНЕ ОПИСАННЯ ФУНДАМЕНТАЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗРОСТАЮЧИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Розглядається параболічне за Петровським рівняння довідного порядку у випадку, коли рівняння містить члени з похідними першого порядку за просторовими змінними і коефіцієнтами, які лінійно зростають на нескінченності як функції цих змінних, а інші коефіцієнти не залежать від просторових змінних. Для такого рівняння дається повне аналітичне описання фундаментального розв'язку задачі Коші.

Ключові слова: *параболічне рівняння зі зростаючими коефіцієнтами, фундаментальний розв'язок, задача Коші, повне аналітичне описання.*

Вступ. При математичному моделюванні деяких реальних процесів виникають параболічні рівняння з різними особливостями і виводженнями, зокрема рівняння зі зростаючими на нескінченності коефіцієнтами. Так, наприклад, для нормальних марковських процесів рівняннями Фоккера-Планка-Колмогорова є параболічні рівняння другого порядку, в яких коефіцієнти при похідних першого порядку за просторовими змінними є лінійними функціями цих змінних, а інші коефіцієнти сталі [1, с.177–179].

Важливим поняттям для таких рівнянь і, взагалі, для всіх параболічних рівнянь є фундаментальний розв'язок задачі Коші (ФРЗК), точна

інформація про який дозволяє одержувати досить точні результати в теорії задачі Коші та навіть теорії крайових задач. У монографіях [2; 3] підсумовано результати, що стосуються побудови, властивостей і застосувань ФРЗК для загальних параболічних за І. Г. Петровським і за С. Д. Ейдельманом рівнянь з обмеженими коефіцієнтами, а також деяких рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами в групі молодших членів. Якщо результати для ФРЗК для рівнянь з обмеженими коефіцієнтами досить точні, то не такими вони є у випадку зростаючих коефіцієнтів. У статті [4] для деяких рівнянь типу Фоккера-Планка-Колмогорова нормального марковського процесу знайдено ФРЗК в явному вигляді, на основі якого встановлено його точні властивості.

У цій статті розглядається параболічне за І. Г. Петровським рівняння довільного порядку, в якому присутні члени зі зростаючими коефіцієнтами при похідних першого порядку такі, як у [4], а інші коефіцієнти можуть залежати лише від часової змінної. Для такого рівняння дається повне аналітичне описання ФРЗК.

1. Позначення, припущення та означення. Користуватимемося такими позначеннями: n, b — задані натуральні числа; i — уявна одиниця; \mathbb{Z}_+^n — сукупність усіх n -вимірних мультиіндексів $k := (k_1, \dots, k_n)$; $|k| := k_1 + \dots + k_n$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$; T — задане додатне

число, $\Pi_{(\tau, T]} := (\tau, T] \times \mathbb{R}^n$, якщо $\tau \in [0, T)$; $\partial_x^k := \partial_{x_1}^{k_1} \dots \partial_{x_n}^{k_n}$, $\partial_{x_j}^{k_j} := \frac{\partial^{k_j}}{\partial x_j^{k_j}}$,

$x^k := x_1^{k_1} \dots x_n^{k_n}$, $|x| := \left(\sum_{j=1}^n x_j^2 \right)^{1/2}$, якщо $k \in \mathbb{Z}_+^n$, а $x := (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$;

(\cdot, \cdot) — скалярний добуток в \mathbb{R}^n ;

$$F_{x \rightarrow \sigma} [f] := \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{-i(x, \sigma)\} f(x) dx, \sigma \in \mathbb{R}^n,$$

і

$$F_{\sigma \rightarrow x}^{-1} [g] := (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\{i(x, \sigma)\} g(\sigma) d\sigma, x \in \mathbb{R}^n,$$

відповідно пряме й обернене перетворення Фур'є; \mathbb{C}^n — n -вимірний комплексний простір.

Будемо розглядати рівняння вигляду

$$L(t, \partial_t, \partial_x) u(t, x) := \partial_t u(t, x) - \sum_{|k| \leq 2b} a_k(t) \partial_x^k u(t, x) - a \sum_{j=1}^n \partial_{x_j} (x_j u(t, x)) = 0, (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (21)$$

за таких припущень:

α) рівняння (1) рівномірно параболічне за І. Г. Петровським на $[0, T]$, тобто існує така стала $\delta > 0$, що для будь-яких $t \in [0, T]$ і довільних $\sigma \in \mathbb{R}^n$ справджується нерівність

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=2b} a_k(t) (i\sigma)^k \leq -\delta |\sigma|^{2b}; \quad (22)$$

β) коефіцієнти $a_k, |k| \leq 2b$ є комплекснозначними неперервними на $[0, T]$ функціями, а a — дійсна стала.

Означення. ФРЗК для рівняння (1) називається функція $G(t, x; \tau, \xi)$, $0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, яка є розв'язком у сенсі теорії узагальнених функцій задачі

$$\begin{aligned} L(t, \partial_t, \partial_x) G(t, x; \tau, \xi) &= 0, \tau < t, \\ G(t, x; \tau, \xi)|_{t=\tau} &= \delta_\xi(x), x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

де τ — довільне число з $[0, T]$ і ξ — довільна точка з \mathbb{R}^n , $\delta_\xi(x)$ — дельта-функція Дірака, що зосереджена в точці ξ .

2. Побудова ФРЗК. Для довільно фіксованого числа $\tau \in [0, T]$ розглянемо задачу Коші

$$L(t, \partial_t, \partial_x) u(t, x) = 0, (t, x) \in \Pi_{(\tau, T]}, \quad (23)$$

$$u(t, x)|_{t=\tau} = \varphi(x), x \in \mathbb{R}^n, \quad (24)$$

в якій φ — нескінченно диференційовна й фінітна функція, для неї існує перетворення Фур'є

$$\psi(\sigma) := (F_{x \rightarrow \sigma}[\varphi])(\sigma), \sigma \in \mathbb{R}^n. \quad (25)$$

Розв'язок задачі (3), (4) шукаємо у вигляді

$$u(t, x) = (F_{\sigma \rightarrow x}^{-1}[\nu(t, \sigma)])(t, x), (t, x) \in \Pi_{(\tau, T]}, \quad (26)$$

де ν — невідома функція.

Підставивши вираз (6) у (3), (4) та скориставшись властивостями перетворення Фур'є, для функції ν одержимо задачу

$$\begin{aligned} \partial_t \nu(t, \sigma) + a \sum_{j=1}^n \sigma_j \partial_{\sigma_j} \nu(t, \sigma) &= \sum_{|k| \leq 2b} a_k(t) (i\sigma)^k \nu(t, \sigma), \\ (t, \sigma) &\in \Pi_{(\tau, T]}, \end{aligned} \quad (27)$$

$$\nu(t, \sigma)|_{t=\tau} = \psi(\sigma), \sigma \in \mathbb{R}^n. \quad (28)$$

Рівняння (7) — це лінійне неоднорідне рівняння з частинними похідними першого порядку. Задача Коші для такого рівняння розв'язується методом характеристик, згідно з яким відповідна йому система звичайних диференціальних рівнянь має вигляд

$$\frac{dt}{1} = \frac{d\sigma_1}{a\sigma_1} = \dots = \frac{d\sigma_n}{a\sigma_n} = \frac{dv}{\sum_{|k| \leq 2b} a_k(t)(i\sigma)^k v}. \quad (29)$$

Вона містить $n+1$ рівнянь. Знайдемо $n+1$ незалежних перших інтегралів цієї системи.

З рівнянь $\frac{d\sigma_j}{a\sigma_j} = dt, j \in \{1, \dots, n\}$, маємо

$$\sigma_j = C_j e^{at}, j \in \{1, \dots, n\}, \quad (30)$$

а з рівняння $\frac{dv}{\sum_{|k| \leq 2b} a_k(t)(i\sigma)^k v} = dt$ одержуємо

$$v = C_0 \exp \left\{ \sum_{|k| \leq 2b} \int_{\tau}^t a_k(\theta)(i\sigma)^k d\theta \right\}. \quad (31)$$

З рівностей (10) і (11) випливає, що незалежними першими інтегралами системи (9) є

$$v \exp \left\{ - \sum_{|k| \leq 2b} \int_{\tau}^t a_k(\theta)(i\sigma)^k d\theta \right\} = C_0, \quad (32)$$

$$\sigma_j e^{-at} = C_j, j \in \{1, \dots, n\}. \quad (33)$$

Нехай $\bar{\sigma}$ і \bar{v} — значення при $t = \tau$ відповідно σ і v . Тоді з (10) і (11) маємо

$$\bar{\sigma}_j = C_j e^{a\tau}, j \in \{1, \dots, n\}, \bar{v} = C_0,$$

але згідно з (8) $\bar{v} = \psi(\bar{\sigma})$, тому

$$C_0 = \psi(\bar{\sigma}) = \psi(\bar{C} e^{a\tau}),$$

де $\bar{C} := (C_1, \dots, C_n)$.

На підставі (12) і (13) одержуємо

$$v(t, \sigma) = \exp \left\{ \sum_{|k| \leq 2b} \int_{\tau}^t a_k(\theta)(i\bar{C} e^{a\theta})^k d\theta \right\} \psi(\bar{C} e^{a\tau}) =$$

$$= \exp \left\{ \sum_{|k| \leq 2b} \int_{\tau}^t a_k(\theta) \left(i e^{-a(t-\theta)} \sigma \right)^k d\theta \right\} \psi \left(e^{-a(t-\tau)} \sigma \right),$$

$$t \geq \tau, \sigma \in \mathbb{R}^n.$$

Тоді за допомогою (6) маємо

$$u(t, x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ i(x, \sigma) + \sum_{|k| \leq 2b} \int_{\tau}^t a_k(\theta) \left(i e^{-a(t-\theta)} \sigma \right)^k d\theta \right\} \psi \left(e^{-a(t-\tau)} \sigma \right) d\sigma, \\ (t, x) \in \Pi_{(\tau, T]}.$$

Зробимо заміну змінних інтегрування за формулами $e^{-a(t-\tau)} \sigma_j = \eta_j$, $j \in \{1, \dots, n\}$, і врахувавши, що $d\sigma = e^{na(t-\tau)} d\eta$, де $\eta := (\eta_1, \dots, \eta_n)$, одержимо рівність

$$u(t, x) = (2\pi)^{-n} e^{na(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ i \left(e^{a(t-\tau)} x, \eta \right) + \sum_{|k| \leq 2b} \int_{\tau}^t a_k(\theta) e^{|k|a(\theta-\tau)} d\theta (i\eta)^k \right\} \psi(\eta) d\eta, \\ (t, x) \in \Pi_{(\tau, T]}.$$

Скориставшись виразом (5) (узявши в ньому замість σ і x відповідно η і ξ) та змінивши порядок інтегрування, прийдемо до формули

$$u(t, x) = \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \quad (t, x) \in \Pi_{(\tau, T]}, \quad (34)$$

в якій

$$G(t, x; \tau, \xi) := (2\pi)^{-n} e^{na(t-\tau)} \int_{\mathbb{R}^n} \exp \left\{ i \left(e^{a(t-\tau)} x - \xi, \eta \right) + \sum_{|k| \leq 2b} \int_{\tau}^t a_k(\theta) e^{|k|a(\theta-\tau)} d\theta (i\eta)^k \right\} d\eta, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (35)$$

Перейшовши в інтегралі (15) від змінної інтегрування η до нової змінної σ за допомогою рівності $\eta = (q(t-\tau))^{-1/(2b)} \sigma$, де

$$q(t) := \begin{cases} \frac{1}{2ab} (e^{2abt} - 1), & a \neq 0, \\ t, & a = 0, \end{cases} \quad t \geq 0, \quad (36)$$

одержимо

$$G(t, x; \tau, \xi) := e^{na(t-\tau)} (q(t-\tau))^{-n/(2b)} \times \\ \times (F_{\sigma \rightarrow z}^{-1} [V(t, \tau, \sigma)])(t, \tau, z)|_{z=Q(t-\tau, x, \xi)}, \quad (37) \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Тут

$$V(t, \tau, \sigma) := V_0(t, \tau, \sigma)V_1(t, \tau, \sigma), 0 \leq \tau < t \leq T, \sigma \in \mathbb{R}^n, \quad (38) \\ V_0(t, \tau, \sigma) := \exp \left\{ \sum_{|k|=2b} \int_{\tau}^t a_k(\theta) e^{2ab(\theta-\tau)} d\theta (q(t-\tau))^{-1} (i\sigma)^k \right\}, \\ V_1(t, \tau, \sigma) := \exp \left\{ \sum_{|k|<2b} \int_{\tau}^t a_k(\theta) e^{a|k|(\theta-\tau)} d\theta (q(t-\tau))^{-|k|/(2b)} (i\sigma)^k \right\}, \\ Q(t, x, \xi) := (e^{at} x - \xi) (q(t))^{-1/(2b)}.$$

Із способу виведення формул (14) і (17) випливає, що функція G є ФРЗК для рівняння (1) і її аналітичні властивості визначаються відповідними властивостями функції V і оберненого перетворення Фур'є.

3. Властивості функції V . Спочатку оцінимо функцію V_0 . Для цього скористаємося умовою (2), з якої випливає нерівність

$$\operatorname{Re} \sum_{|k|=2b} \int_{\tau}^t a_k(\theta) e^{2ab(\theta-\tau)} d\theta (q(t-\tau))^{-1} (i\sigma)^k \leq \\ \leq -\delta \int_{\tau}^t e^{2ab(\theta-\tau)} d\theta (q(t-\tau))^{-1} |\sigma|^{2b} = -\delta |\sigma|^{2b}, \\ 0 \leq \tau < t \leq T, \sigma \in \mathbb{R}^n.$$

За допомогою цієї нерівності маємо оцінку

$$|V_0(t, \tau, \sigma)| \leq \exp \left\{ -\delta |\sigma|^{2b} \right\}, 0 \leq \tau < t \leq T, \sigma \in \mathbb{R}^n. \quad (39)$$

Знайдемо ще оцінку $|V_0(t, \tau, \sigma + i\gamma)|$, $0 \leq \tau < t \leq T, \{\sigma, \gamma\} \subset \mathbb{R}^n$, де

$$|V_0(t, \tau, \sigma + i\gamma)| = |V_0(t, \tau, \sigma)| \exp \{P_0(t, \tau, \sigma, \gamma)\}, \quad (40)$$

$$P_0(t, \tau, \sigma, \gamma) = \sum_{(k,l)} C_k^l \int_{\tau}^t a_k(\theta) e^{2ab(\theta-\tau)} d\theta (q(t-\tau))^{-1} i^{|k|} \sigma^{k-l} \gamma^l.$$

Тут підсумовування проводиться за всіма мультиіндексами $\{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ такими, що $|k| = 2b$ і $0 < l \leq k$.

Врахувавши обмеженість коефіцієнтів a_k , $|k| = 2b$, оцінимо

$$P_0(t, \tau, \sigma, \gamma) \leq c \sum_{(k,l)} \int_{\tau}^t e^{2ab(\theta-\tau)} d\theta (q(t-\tau))^{-1} |\sigma|^{k-l} |\gamma|^{|l|} = c \sum_{(k,l)} |\sigma|^{k-l} |\gamma|^{|l|}.$$

Нехай ε — деяке досить мале додатне число (його величина буде вказана нижче). Розглянемо такі два випадки:

- 1) $|\gamma| \leq \varepsilon |\sigma|$,
- 2) $|\sigma| < \varepsilon^{-1} |\gamma|$.

У випадку 1) маємо

$$|P_0(t, \tau, \sigma, \gamma)| \leq c\varepsilon |\sigma|^{2b}$$

та на підставі (19) і (20) одержуємо нерівність

$$|V_0(t, \tau, \sigma + i\gamma)| \leq \exp\{-(\delta - c\varepsilon)|\sigma|^{2b}\} = \exp\{-\delta_0|\sigma|^{2b}\}, \quad (41)$$

якщо ε вибрати так, щоб $\delta - c\varepsilon =: \delta_0 > 0$.

У випадку 2) існує така стала c_0 , що

$$|P_0(t, \tau, \sigma, \gamma)| \leq c_0 |\gamma|^{2b}$$

і, отже, в цьому випадку

$$|V_0(t, \tau, \sigma + i\gamma)| \leq \exp\{-\delta|\sigma|^{2b} + c_0|\gamma|^{2b}\}. \quad (42)$$

З нерівностей (21) і (22) випливає оцінка

$$|V_0(t, \tau, \sigma + i\gamma)| \leq \exp\{-\delta_0|\sigma|^{2b} + c_0|\gamma|^{2b}\},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \{\sigma, \gamma\} \subset \mathbb{R}^n. \quad (43)$$

Оцінимо функцію V_1 . Використовуючи обмеженість функцій a_k , $|k| < 2b$, для $0 \leq \tau < t \leq T$ і $\{\sigma, \gamma\} \subset \mathbb{R}^n$ маємо

$$|V_1(t, \tau, \sigma + i\gamma)| \leq \exp\left\{c \sum_{|k| < 2b} \int_{\tau}^t e^{a|k|(\theta-\tau)} d\theta (q(t-\tau))^{-|k|/(2b)} (|\sigma| + |\gamma|)^{|k|}\right\}. \quad (44)$$

Оскільки при $0 \leq \tau \leq \theta \leq t \leq T$ і $|k| < 2b$

$$e^{-a(2b-|k|)(\theta-\tau)} \leq e^{|a|(2b-|k|)(t-\tau)} \leq e^{2|a|bT},$$

$$q(t-\tau) \leq \begin{cases} \frac{1}{2ab} (e^{2abT} - 1) \leq \frac{1}{2ab} e^{2abT}, & a > 0, \\ \frac{1}{2|a|b} (1 - e^{2ab(t-\tau)}) \leq \frac{1}{2|a|b} \leq \frac{1}{2|a|b} e^{2|a|bT}, & a < 0, \\ T, & a = 0, \end{cases}$$

то

$$\begin{aligned}
 & \int_{\tau}^t e^{a|k|(\theta-\tau)} d\theta (q(t-\tau))^{-|k|/(2b)} = \\
 & = \int_{\tau}^t e^{2ab(\theta-\tau)-a(2b-|k|)(\theta-\tau)} d\theta (q(t-\tau))^{-|k|/(2b)} \leq \\
 & \leq e^{2|a|b\Gamma} \int_{\tau}^t e^{2ab(\theta-\tau)} d\theta (q(t-\tau))^{-|k|/(2b)} = e^{2|a|b\Gamma} (q(t-\tau))^{1-|k|/(2b)} \leq \\
 & \leq e^{2|a|b\Gamma} q(t-\tau) = c_{\Gamma},
 \end{aligned} \tag{45}$$

де $c_{\Gamma} := \begin{cases} \frac{e^{4|a|b\Gamma}}{2|a|b}, a \neq 0, \\ \Gamma, a = 0, \end{cases}$ якщо $q(t-\tau) > 1$, і $c_{\Gamma} := e^{2|a|b\Gamma}$, якщо $q(t-\tau) \leq 1$.

Якщо ε — задане додатне число, то існує число $N_{\varepsilon} > 1$ таке, що для всіх $|\sigma| + |\gamma| > N_{\varepsilon}$ і $|k| < 2b$

$$(|\sigma| + |\gamma|)^{|k|} \leq 2^{1-2b} \varepsilon (|\sigma| + |\gamma|)^{2b} \leq 2^{1-2b} \varepsilon 2^{2b-1} (|\sigma|^{2b} + |\gamma|^{2b}).$$

Якщо $|\sigma| + |\gamma| \leq N_{\varepsilon}$, то $(|\sigma| + |\gamma|)^{|k|} \leq N_{\varepsilon}^{|k|} \leq N_{\varepsilon}^{2b}$. Отже, для довільних $|\sigma| + |\gamma|$ маємо

$$(|\sigma| + |\gamma|)^{|k|} \leq N_{\varepsilon}^{2b} + \varepsilon (|\sigma|^{2b} + |\gamma|^{2b}). \tag{46}$$

Позначимо через r число всіх мультиіндексів $k \in \mathbb{Z}_+^n$ таких, що $|k| < 2b$. Використовуючи нерівності (24)–(26), одержуємо

$$\begin{aligned}
 |V_1(t, \tau, \sigma + i\gamma)| & \leq \exp \left\{ rcc_{\Gamma} \left(N_{\varepsilon}^{2b} + \varepsilon (|\sigma|^{2b} + |\gamma|^{2b}) \right) \right\} = \\
 & = C_{\varepsilon} \exp \left\{ rcc_{\Gamma} \varepsilon (|\sigma|^{2b} + |\gamma|^{2b}) \right\},
 \end{aligned} \tag{47}$$

де $C_{\varepsilon} := \exp \{ rcc_{\Gamma} N_{\varepsilon}^{2b} \}$. Виберемо ε таким, щоб $\delta_0 - rcc_{\Gamma} \varepsilon =: \delta_1 > 0$, де δ_0 — стала з оцінки (23). Тоді з (18), (23) і (27) випливає оцінка

$$|V(t, \tau, \sigma + i\gamma)| \leq C \exp \left\{ -\delta_1 |\sigma|^{2b} + c_1 |\gamma|^{2b} \right\}, \tag{48}$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \{\sigma, \gamma\} \subset \mathbb{R}^n,$$

Для мультиіндексів $\{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ покладемо

$$P_{kl}(\sigma) := (i\sigma)^k (-i\sigma)^l, \sigma \in \mathbb{R}^n.$$

З оцінки (28) безпосередньо випливає, що для довільних $\{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n$ справджуються оцінки

$$|P_{kl}(\sigma + i\gamma)V(t, \tau, \sigma + i\gamma)| \leq C_{kl} \exp\left\{-\delta_2 |\sigma|^{2b} + c_2 |\gamma|^{2b}\right\}, \quad (49)$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \{\sigma, \gamma\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де $0 < \delta_2 < \delta_1, c_2 > c_1$.

Отже, функції V і $P_{kl}V$, як видно з їх явних виразів та одержаних оцінок (28) і (29), допускають аналітичне продовження з простору \mathbb{R}^n у простір \mathbb{C}^n до цілих функцій порядку зростання $2b$ в \mathbb{C}^n і такого ж порядку спадання в \mathbb{R}^n .

4. Властивості ФРЗК. Диференціюванням рівності (17) за змінними x і ξ одержуємо рівності

$$\begin{aligned} \partial_x^k \partial_\xi^l G(t, x; \tau, \xi) &= e^{(n+|k|)a(t-\tau)} (q(t-\tau))^{-(n+|k|+|l|)(2b)} \times \\ &\times \left(F_{\sigma \rightarrow z}^{-1} [P_{kl}(\sigma)V(t, \tau, \sigma)] \right) (t, \tau, z) \Big|_{z=Q(t-\tau, x, \xi)}, \end{aligned} \quad (50)$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Використовуючи рівності (17) і (30) та встановлені в пункті 3 властивості V і $P_{kl}V$, за допомогою леми 1.1 з [3, с. 28] про перетворення Фур'є цілих функцій, одержуємо повне аналітичне описання ФРЗК, яке наведено в наступній теоремі.

Теорема. Якщо для рівняння (1) виконуються умови α) і β) з пункту 1, то правильні такі твердження:

- 1) для рівняння (1) існує ФРЗК G ;
- 2) функція G та її похідні за x і ξ допускають аналітичні продовження в простір \mathbb{C}^n , які мають вигляд

$$\begin{aligned} \partial_x^k \partial_\xi^l G(t, x + iy; \tau, \xi + i\eta) &= e^{(n+|k|)a(t-\tau)} \times \\ &\times (q(t-\tau))^{-(n+|k|+|l|)(2b)} \Omega_{kl}(t, \tau, z) \Big|_{z=Q(t-\tau, x, \xi) + iQ(t-\tau, y, \eta)}, \\ &0 \leq \tau < t \leq T, \{x, y, \xi, \eta\} \subset \mathbb{R}^n, \{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n, \end{aligned}$$

де $\Omega_{kl}(t, \tau, z), z \in \mathbb{C}^n$, при фіксованих t і $\tau \in$ цілими функціями від z порядку зростання $q := 2b / (2b - 1)$ і того самого порядку спадання при $z = x \in \mathbb{R}^n$;

3) справджуються оцінки

$$\begin{aligned} & \left| \partial_x^k \partial_\xi^l G(t, x + iy; \tau, \xi + i\eta) \right| \leq C_{kl} e^{(n+|k|)a(t-\tau)} \times \\ & \times (q(t-\tau))^{-(n+|k|+|l|)/(2b)} E_c(t-\tau, x, \xi) E_{-c'}(t-\tau, y, \eta), \\ & 0 \leq \tau < t \leq T, \{x, y, \xi, \eta\} \subset \mathbb{R}^n, \{k, l\} \subset \mathbb{Z}_+^n, \end{aligned}$$

де $E_c(t, x, \xi) := \exp\left\{-c|Q(t, x, \xi)|^q\right\}$, C_{kl}, c і c' — додатні сталі, що залежать лише від чисел n, a, b, T , $\max_{t \in [0, T], |k| \leq 2b} |a_k(t)|$ і сталої δ з умовою (2);

4) правильна формула

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) d\xi = \exp\left\{na(t-\tau) + \int_\tau^t a_0(\theta) d\theta\right\},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, x \in \mathbb{R}^n. \quad (51)$$

На підставі сказаного перед формулюванням теореми потребує доведення лише рівність (31). В інтегралі з цієї рівності використаємо формулу (17) і здійснимо заміну змінної інтегрування ξ за допомогою формули $Q(t-\tau, x, \xi) = \eta$. Тоді одержимо

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} G(t, x; \tau, \xi) d\xi &= e^{na(t-\tau)} F_{\eta \rightarrow 0} \left[F_{\sigma \rightarrow \eta}^{-1} [V(t, \tau, \sigma)] \right] = \\ &= e^{na(t-\tau)} V(t, \tau, 0) = \exp\left\{na(t-\tau) + \int_\tau^t a_0(\theta) d\theta\right\}. \end{aligned}$$

Висновки. Вищенаведені результати дозволяють довести для рівняння (1) точні теореми про коректну розв'язність задачі Коші та інтегральне зображення розв'язків. Вони також можуть використовуватися для побудови та вивчення властивостей ФРЗК для рівняння вигляду (1) у випадку, коли коефіцієнти a_k залежать від усіх змінних t і x .

Список використаних джерел:

1. Тихонов В. И. Марковские процессы / В. И. Тихонов, М. А. Миронов. — М. : Сов. радио, 1977. — 488 с.
2. Эйдельман С. Д. Параболические системы / С. Д. Эйдельман. — М. : Наука, 1964. — 443 с.
3. Eidelman S. D. Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / S. D. Eidelman, S. D. Ivasyshen, A. N. Kochubei // Operator Theory: Adv. and Appl. — 2004. — Vol. 152. — 390 p.
4. Заболотко Т. О. Про фундаментальний розв'язок задачі Коші для деяких параболічних рівнянь зі зростаючими коефіцієнтами та деякі його застосу-

вання / Т. О. Заболотько, С. Д. Івасишен, Г. С. Пасічник // Наук. вісник Чернівецького нац. ун-ту ім. Ю. Федьковича. Сер.: Математика : зб. наук. пр. — Чернівці : Чернівецький нац. ун-т, 2012. — Т. 2, № 2–3. — С. 81–89.

The survey considers the arbitrary order equation parabolic in the sense of Petrovsky when equation contains members with the first order derivatives of spatial variables and linearly increasing coefficients as functions of this variables and other coefficients don't depend on spatial variables. A complete analytical description of a fundamental solution of the Cauchy problem is given for such equation.

Key words: *parabolic equation with increasing coefficients, fundamental solution, Cauchy problem, complete analytical description.*

Отримано: 11.03.2014

УДК 517.947

І. М. Конет, д-р фіз.-мат. наук, професор

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ГІПЕРБОЛІЧНА КРАЙОВА ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ ЦИЛІНДРИЧНОМУ ШАРІ

Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна) вперше побудовано точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндричному шарі.

Ключові слова: *гіперболічне рівняння, початкові та крайові умови, умови спряження, інтегральні перетворення, головні розв'язки.*

Вступ. Теорія крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними — важливий розділ сучасної теорії диференціальних рівнянь, який в теперішній час інтенсивно розвивається. Її актуальність обумовлена як значимістю її результатів для розвитку багатьох розділів математики, так і численними застосуваннями її досягнень при дослідженні різноманітних математичних моделей різних процесів і явищ фізики, механіки, хімії, біології, медицини, економіки, техніки та сучасних технологій.

Добре відомо, що складність досліджуваних крайових задач суттєво залежить від коефіцієнтів рівнянь (різні види виродженостей і особливостей) та геометрії області (гладкість межі, наявність кутових точок, тощо), в якій розглядається задача. На цей час досить детально вивчено властивості розв'язків крайових задач для лінійних, квазілінійних та пе-

вних класів нелінійних рівнянь в однозв'язних областях (однорідних середовищах), які обумовлені згаданими вище властивостями коефіцієнтів рівнянь і геометрії області, та побудовано функціональні простори коректності задач за Адамаром для тих чи інших областей [1–5].

Водночас багато важливих прикладних задач теплофізики, термомеханіки, теорії пружності, теорії електричних кіл, теорії коливань приводять до крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними не тільки в однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівнянь є неперервними, але й в неоднорідних та кусково-однорідних середовищах, коли коефіцієнти рівняння є кусково-неперервними чи, зокрема, кусково-сталими [6–9].

Окрім методу відокремлення змінних [10] одним з важливих і ефективних методів вивчення лінійних крайових задач для диференціальних рівнянь з частинними похідними є метод інтегральних перетворень, який дає можливість будувати в аналітичному вигляді розв'язки тих чи інших крайових задач через їх інтегральне зображення. Варто також зауважити, що для досить широкого класу задач (в кусково-однорідних середовищах) ефективним виявився *метод гібридних інтегральних перетворень*, які породжені диференціальними операторами, коли на кожній компоненті зв'язності кусково-однорідного середовища розглядаються або ж різні диференціальні оператори, або ж диференціальні оператори того ж самого вигляду, але з різними наборами коефіцієнтів [11–18].

Гіперболічні крайові задачі математичної фізики в необмежених (двоскладових і тришарових) та напівобмежених кусково-однорідних циліндричних областях розглянуто у працях автора [19–21].

У цій статті ми пропонуємо точний аналітичний розв'язок гіперболічної крайової задачі математичної фізики для кусково-однорідного циліндричного шару.

Постановка задачі. Розглянемо задачу побудови обмеженого на множині

$$D = \left\{ (t, r, \varphi, z); t > 0; (r, \varphi) \in \Omega_2 = (0; +\infty) \times [0; 2\pi); z \in K_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} I_j \equiv \right. \\ \left. \equiv \bigcup_{j=1}^{n+1} (l_{j-1}; l_j), l_0 \geq 0; l_k < l_{k+1}; l_{n+1} \equiv l < +\infty \right\},$$

2π -періодичного щодо кутової змінної φ розв'язку диференціальних рівнянь гіперболічного типу 2-го порядку [10]

$$\frac{\partial^2 u_j}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z), \quad (1)$$

$$z \in I_j; j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_j \Big|_{t=0} = g_j^1(r, \varphi, z); \frac{\partial u_j}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_j^2(r, \varphi, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (2)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{z=l_0} = g_0(t, r, \varphi); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{z=l} = g_l(t, r, \varphi), \quad (3)$$

$$\frac{\partial^k u_j}{\partial r^k} \Big|_{r=0} = 0, \frac{\partial^k u_j}{\partial r^k} \Big|_{r=\infty} = 0; j = \overline{1, n+1}; k = 0, 1 \quad (4)$$

та умовами спряження [11]

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{z=l_k} = 0; j = 1, 2; k = \overline{1, n}, \quad (5)$$

де a_{rj} , a_{zj} , χ_j , α_{js}^k , β_{js}^k — деякі невід'ємні сталі;

$$c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; c_{1k} c_{2k} > 0; \left| \alpha_{11}^0 \right| + \left| \beta_{11}^0 \right| \neq 0; \left| \alpha_{22}^{n+1} \right| + \left| \beta_{22}^{n+1} \right| \neq 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = \{ f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z) \};$$

$$g^1(r, \varphi, z) = \{ g_1^1(r, \varphi, z), g_2^1(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^1(r, \varphi, z) \};$$

$$g^2(r, \varphi, z) = \{ g_1^2(r, \varphi, z), g_2^2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}^2(r, \varphi, z) \};$$

$g_0(t, r, \varphi)$, $g_l(t, r, \varphi)$ — задані обмежені неперервні функції; $u(t, r, \varphi, z) = \{ u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z) \}$ — шукана функція.

Основна частина. Припустимо, що розв'язок задачі (1)–(5) існує і задані й шукані функції задовольняють умови застосовності залучених нижче інтегральних перетворень [22; 23; 11].

До задачі (1)–(5) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є щодо кутової змінної φ [23]:

$$F_m [g(\varphi)] = \int_0^{2\pi} g(\varphi) e^{-im\varphi} d\varphi \equiv g_m, i = \sqrt{-1}, \quad (6)$$

$$F_m^{-1}[g_m] = \frac{1}{2\pi} \operatorname{Re} \left(\sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m g_m e^{im\varphi} \right) \equiv g(\varphi), \quad (7)$$

$$F_m \left[\frac{d^2 g}{d\varphi^2} \right] = -m^2 F_m [g(\varphi)] \equiv -m^2 g_m, \quad (8)$$

де $\operatorname{Re}(\dots)$ — дійсна частина виразу (\dots) щодо φ , $\varepsilon_0 = 1$; $\varepsilon_k = 2$; $k = 1, 2, 3, \dots$

Інтегральний оператор Фур'є F_m за правилом (6) внаслідок тотожності (8) початково-крайовій задачі (1)–(5) ставить у відповідність задачу побудови обмеженого на множині

$$D' = \{(t, r, z); t > 0; r \in (0; +\infty); z \in K_n^+\}$$

розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 u_{jm}}{\partial t^2} - \left[a_{rj}^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{m^2}{r^2} \right) + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_{jm} + \chi_j^2 u_{jm} = f_{jm}(t, r, z), \quad (9)$$

$$z \in I_j, j = \overline{1, n+1}$$

з початковими умовами

$$u_{jm} \Big|_{t=0} = g_{jm}^1(r, z); \quad \frac{\partial u_{jm}}{\partial t} \Big|_{t=0} = g_{jm}^2(r, z); \quad z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (10)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{j1}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^0 \right) u_{jm} \Big|_{z=l_0} = g_{0m}(t, r); \quad \left(\alpha_{j2}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^{n+1} \right) u_{n+1,m} \Big|_{z=l} = g_{lm}(t, r), \quad (11)$$

$$\frac{\partial^k u_{jm}}{\partial r^k} \Big|_{r=0} = 0; \quad \frac{\partial^k u_{jm}}{\partial r^k} \Big|_{r=+\infty} = 0; \quad z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, k = \overline{0, 1} \quad (12)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) u_{km} - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1,m} \right] \Big|_{z=l} = 0; \quad j = \overline{1, 2}; k = \overline{1, n}. \quad (13)$$

До задачі (9)–(13) застосуємо інтегральне перетворення Фур'є-Бесселя щодо радіальної змінної r [23]:

$$H_\nu [g(r)] = \int_0^{+\infty} g(r) J_\nu(\lambda r) r dr \equiv \tilde{g}(\lambda), \quad (14)$$

$$H_\nu [\tilde{g}(\lambda)] = \int_0^{+\infty} \tilde{g}(\lambda) J_\nu(\lambda r) \lambda d\lambda \equiv g(r), \quad (15)$$

$$H_\nu \left[\frac{d^2 g}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dg}{dr} - \frac{\nu^2}{r^2} g \right] = -\lambda^2 H_\nu [g(r)] \equiv -\lambda^2 \tilde{g}(\lambda), \quad (16)$$

де $J_\nu(x)$ — циліндрична функція дійсного аргументу 1-го роду ν -го порядку.

Інтегральний оператор H_m за правилом (14) внаслідок тотожності (16) крайовій задачі (9)–(13) ставить у відповідність задачу побу-

дови обмеженого на множині $D'' = \{(t, z); t > 0; z \in K_n^+\}$ розв'язку диференціальних рівнянь

$$\frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm}}{\partial t^2} - a_{zj}^2 \frac{\partial^2 \tilde{u}_{jm}}{\partial z^2} + (a_{rj}^2 \lambda^2 + \chi_j^2) \tilde{u}_{jm} = \tilde{f}_{jm}(t, \lambda, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1} \quad (17)$$

з початковими умовами

$$\tilde{u}_{jm} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^1(\lambda, z); \frac{\partial \tilde{u}_{jm}}{\partial t} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{jm}^2(\lambda, z); z \in I_j; j = \overline{1, n+1}, \quad (18)$$

крайовими умовами

$$\left(\alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{11}^0 \right) \tilde{u}_{1m} \Big|_{z=l_0} = \tilde{g}_{0k}(t, \lambda); \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{22}^{n+1} \right) \tilde{u}_{n+1,m} \Big|_{z=l} = \tilde{g}_{lm}(t, \lambda) \quad (19)$$

та умовами спряження

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j1}^k \right) \tilde{u}_{km} - \left(\alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial z} + \beta_{j2}^k \right) \tilde{u}_{k+1,m} \right] \Big|_{z=l_m} = 0; j = 1, 2; k = \overline{1, n}. \quad (20)$$

До задачі (17)–(20) застосуємо скінченне інтегральне перетворення Фур'є на декартовому сегменті $[l_0; l]$ з n точками спряження щодо змінної z [11]:

$$F_{sn} [g(z)] = \int_{l_0}^l g(z) V(z, \lambda_s) \sigma(z) dz \equiv g_s, \quad (21)$$

$$F_{sn}^{-1} [g_s] = \sum_{s=1}^{\infty} g_s \frac{V(z, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2} \equiv g(z), \quad (22)$$

$$\begin{aligned} F_{sn} \left[\sum_{i=1}^{n+1} a_{zi}^2 \theta(z - l_{i-1}) \theta(l_i - z) \frac{d^2 g}{dz^2} \right] = \\ = -\lambda_s^2 g_s - \sum_{i=1}^{n+1} k_i^2 \int_{l_{j-1}}^{l_j} g(z) V_i(z, \lambda_s) \sigma_i dz - \\ - \sigma_1 a_{z1}^2 \left(\alpha_{11}^0 \right)^{-1} V_1(l_0, \lambda_s) \left(\alpha_{11}^0 \frac{dg}{dz} + \beta_{11}^0 g \right) \Big|_{z=l_0} + \\ + \sigma_{n+1} a_{z,n+1}^2 \left(\alpha_{22}^{n+1} \right)^{-1} V_{n+1}(l, \lambda_s) \left(\alpha_{22}^{n+1} \frac{dg}{dz} + \beta_{22}^{n+1} g \right) \Big|_{z=l}. \end{aligned} \quad (23)$$

У формулах (21)–(23) беруть участь величини і функції:

$$V(z, \lambda_s) = \sum_{i=1}^{n+1} V_i(z, \lambda_s) \theta(z - l_{i-1}) \theta(l_i - z);$$

$$\sigma(z) = \sum_{i=1}^{n+1} \sigma_i \theta(z - l_{i-1}) \theta(l_i - z);$$

$$\sigma_k = \frac{a_{z,k+1}}{a_{zk}^2} \prod_{m=k}^n c_{1m} c_{2m}; \sigma_{n+1} = \frac{1}{a_{z,n+1}}; \quad k = \overline{1, n};$$

$$V_m(z, \lambda_s) = \prod_{i=m}^n c_{2i} q_{i+1,s} G_m(z, \lambda_s); m = \overline{1, n};$$

$$V_{n+1}(z, \lambda_s) = \omega_{n2}(\lambda_s) \cos(q_{n+1,s} z) - \omega_{n1}(\lambda_s) \sin(q_{n+1,s} z);$$

$$G_m(z, \lambda_s) = \omega_{m-1,2}(\lambda_s) \cos(q_{ms} z) - \omega_{m-1,1}(\lambda_s) \sin(q_{ms} z);$$

$$\|V(z, \lambda_s)\|^2 = \int_{l_0}^l V^2(z, \lambda_s) \sigma(z) dz = \sum_{k=1}^{n+1} \int_{l_{k-1}}^{l_k} V_k^2(z, \lambda_s) \sigma_k dz;$$

$$q_j \equiv q_j(\lambda) = a_{z,s}^{-1} (\lambda^2 + k_s^2)^{1/2}; q_{js} = q_j(\lambda_s);$$

$$v_{ip}^{k1}(q_{js} l_m) = -\alpha_{ip}^k q_{sj} \sin(q_{js} l_m) + \beta_{ip}^k \cos(q_{js} l_m);$$

$$v_{ip}^2(q_{js} l_m) = \alpha_{ip}^k q_{js} \cos(q_{js} l_m) + \beta_{ip}^k \sin(q_{js} l_m);$$

$$\omega_{01}(\lambda_s) = v_{11}^{01}(q_{1s} l_0); \omega_{02}(\lambda_s) = v_{11}^{02}(q_{1s} l_0);$$

$$\psi_{pm}^k(x, y) = v_{11}^{kp}(x) v_{22}^{km}(y) - v_{21}^{kp}(x) v_{12}^{km}(y);$$

$$\omega_{pm}(\lambda_s) = \omega_{p-1,2}(\lambda_s) \psi_{1m}^p(q_{pj} l_p, q_{p+1,s} l_p) - \omega_{p-1,1}(\lambda_s) \psi_{2m}^p(q_{ps} l_p, q_{p+1,j} l_p);$$

λ_s – корені трансцендентного рівняння

$$\Delta_n(\lambda) \equiv v_{22}^{n+1,2}(q_{n+1} l) \omega_{n1}(\lambda) - v_{22}^{n+1,1}(q_{n+1} l) \omega_{n2}(\lambda) = 0,$$

які утворюють дискретний спектр.

Запишемо систему диференціальних рівнянь (17) та початкові умови (18) у матричній формі

$$\begin{bmatrix} \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{r1}^2 \lambda^2 + \chi_1^2 \right) \tilde{u}_{1m} \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z2}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{r2}^2 \lambda^2 + \chi_2^2 \right) \tilde{u}_{2m} \\ \dots \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - a_{z,n+1}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + a_{r,n+1}^2 \lambda^2 + \chi_{n+1}^2 \right) \tilde{u}_{n+1,m} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{f}_{1m}(t, \lambda, z) \\ \tilde{f}_{2m}(t, \lambda, z) \\ \dots \\ \tilde{f}_{n+1,m}(t, \lambda, z) \end{bmatrix}, \quad (24)$$

$$\begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m} \\ \tilde{u}_{2m} \\ \dots \\ \tilde{u}_{n+1,m} \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m}^1(\lambda, z) \\ \tilde{g}_{2m}^1(\lambda, z) \\ \dots \\ \tilde{g}_{n+1,m}^1(\lambda, z) \end{bmatrix}, \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \tilde{u}_{1m} \\ \tilde{u}_{2m} \\ \dots \\ \tilde{u}_{n+1,m} \end{bmatrix}_{t=0} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_{1m}^2(\lambda, z) \\ \tilde{g}_{2m}^2(\lambda, z) \\ \dots \\ \tilde{g}_{n+1,m}^2(\lambda, z) \end{bmatrix}. \quad (25)$$

Інтегральний оператор F_{sn} , який діє за формулою (21), зобразимо у вигляді операторної матриці-рядка

$$F_{sn}[\dots] = \left[\int_{l_0}^{l_1} \dots V_1(z, \lambda_s) \sigma_1 dz \int_{l_1}^{l_2} \dots V_2(z, \lambda_s) \sigma_2 dz \dots \int_{l_n}^l \dots V_{n+1}(z, \lambda_s) \sigma_{n+1} dz \right] \quad (26)$$

і застосуємо за правилом множення матриць до задачі (24), (25). Внаслідок тотожності (23) одержуємо задачу Коші для звичайного диференціального рівняння 2-го порядку

$$\sum_{j=1}^{n+1} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \lambda_s^2 + a_{ij}^2 \lambda^2 + \chi_j^2 + k_j^2 \right) \tilde{u}_{jms} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{f}_{jms}(t, \lambda) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} \times \quad (27)$$

$$\times V_1(l_0, \lambda_s) \tilde{g}_{0m}(t, \lambda) + \sigma_{n+1} a_{z,n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l, \lambda_s) \tilde{g}_{lm}(t, \lambda),$$

$$\sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jms} \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jms}^1(\lambda), \frac{d}{dt} \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jms} \Big|_{t=0} = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jms}^2(\lambda), \quad (28)$$

де

$$\tilde{u}_{jms}(t, \lambda) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \tilde{u}_{jk}(t, \lambda, z) V_j(z, \lambda_s) \sigma_j dz; j = \overline{1, n+1},$$

$$\tilde{f}_{jms}(t, \lambda) = \int_{l_{j-1}}^{l_j} \tilde{f}_{jm}(t, \lambda, z) V_j(z, \lambda_s) \sigma_j dz; j = \overline{1, n+1}$$

і аналогічно $\tilde{g}_{jms}^1(\lambda), \tilde{g}_{jms}^2(\lambda); l_{n+1} \equiv l$.

Припустимо, не зменшуючи загальності, що $\max_{1 \leq j \leq n+1} \{a_{ij}^2 \lambda^2 + \chi_j^2\} = a_{r1}^2 \lambda^2 + \chi_1^2$ і покладемо всюди $k_j^2 = (a_{r1}^2 \lambda^2 + \chi_1^2) - (a_{ij}^2 \lambda^2 + \chi_j^2)$. Задача Коші (27), (28) набуває вигляду

$$\frac{d^2 \tilde{u}_{ms}}{dt^2} + \Delta^2(\lambda, \lambda_s) \tilde{u}_{ms} = \tilde{f}_{ms}(t, \lambda) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} \times \quad (29)$$

$$\times V_1(l_0, \lambda_s) \tilde{g}_{0m}(t, \lambda) + \sigma_{n+1} a_{z,n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l, \lambda_s) \tilde{g}_{lm}(t, \lambda),$$

$$\tilde{u}_{ms} \Big|_{t=0} = \tilde{g}_{ms}^1(\lambda), \quad \left. \frac{d\tilde{u}_{ms}}{dt} \right|_{t=0} = \tilde{g}_{ms}^2(\lambda), \quad (30)$$

де

$$\tilde{u}_{ms}(t, \lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{u}_{jms}(t, \lambda), \quad \Delta^2(\lambda, \lambda_s) = \lambda_s^2 + a_{r_1}^2 \lambda^2 + \lambda_1^2,$$

$$\tilde{f}_{ms}(t, \lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{f}_{jms}(t, \lambda), \quad \tilde{g}_{ms}^1(\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jms}^1(\lambda), \quad \tilde{g}_{ms}^2(\lambda) = \sum_{j=1}^{n+1} \tilde{g}_{jms}^2(\lambda).$$

Безпосередньо перевіряється, що єдиним розв'язком неоднорідної задачі Коші (29), (30) є функція

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{ms}(t, \lambda) &= \frac{\sin(\Delta(\lambda, \lambda_s)t)}{\Delta(\lambda, \lambda_s)} \tilde{g}_{ms}^2(\lambda) + \frac{d}{dt} \frac{\sin(\Delta(\lambda, \lambda_s)t)}{\Delta(\lambda, \lambda_s)} \tilde{g}_{ms}^1(\lambda) + \\ &+ \int_0^t \frac{\sin(\Delta(\lambda, \lambda_s)(t-\tau))}{\Delta(\lambda, \lambda_s)} \left[\tilde{f}_{ms}(\tau, \lambda) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} V_1(t_0, \lambda_s) \times \right. \\ &\left. \times \tilde{g}_{0m}(\tau, \lambda) + \sigma_{n+1} a_{z,n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l, \lambda_s) \tilde{g}_{lm}(\tau, \lambda) \right] d\tau. \end{aligned} \quad (31)$$

Оскільки суперпозиція операторів F_{sn} та F_{sn}^{-1} є одиничним оператором, то оператор F_{sn}^{-1} зобразимо у вигляді операторної матриці-стовпця

$$F_{sn}^{-1} [\dots] = \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_1(z, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2} \\ \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_2(z, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2} \\ \dots \dots \dots \\ \sum_{s=1}^{\infty} \dots \frac{V_{n+1}(z, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2} \end{bmatrix}. \quad (32)$$

Застосуємо за правилом множення матриць операторну матрицю-стовпець (32) до матриці-елемента $[\tilde{u}_{ms}(t, \lambda)]$, де функція $\tilde{u}_{ms}(t, \lambda)$ визначена формулою (31). Одержуємо єдиний розв'язок початково-крайової задачі спряження (17)–(20):

$$\tilde{u}_{jm}(t, \lambda, z) = \sum_{s=1}^{\infty} \left[\frac{\sin(\Delta(\lambda, \lambda_s)t)}{\Delta(\lambda, \lambda_s)} \tilde{g}_{ms}^2(\lambda) + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\sin(\Delta(\lambda, \lambda_s)t)}{\Delta(\lambda, \lambda_s)} \tilde{g}_{ms}^1(\lambda) \right] \times$$

$$\begin{aligned}
 & \times \frac{V_j(z, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2} + \sum_{s=1}^n \int_0^t \frac{\sin(\Delta(\lambda, \lambda_s)(t-\tau))}{\Delta(\lambda, \lambda_s)} \left[\tilde{f}_{ms}(\tau, \lambda) - \sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} \times \right. \\
 & \left. \times V_1(l_0, \lambda_s) \tilde{g}_{0m}(\tau, \lambda) + \sigma_{n+1} a_{z,n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} V_{n+1}(l, \lambda_s) \tilde{g}_{lm}(\tau, \lambda) \right] d\tau \times (33) \\
 & \times \frac{V_j(z, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2}; j = \overline{1, n+1}.
 \end{aligned}$$

До функцій $\tilde{u}_{im}(t, \lambda, z)$, визначених формулами (33), послідовно застосуємо обернені оператори H_m^{-1} за правилом (15) та F_m^{-1} за правилом (7). Виконавши нескладні перетворення, одержуємо функції

$$\begin{aligned}
 u_j(t, r, \varphi, z) = & \\
 = & \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^t \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{l_k} E_{jk}(t-\tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) f_k(\tau, \rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho d\tau + \\
 & + \frac{\partial}{\partial t} \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{l_k} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) g_k^1(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + \\
 & + \sum_{k=1}^{n+1} \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \int_0^{l_k} E_{jk}(t, r, \rho, \varphi - \alpha, z, \xi) g_k^2(\rho, \alpha, \xi) \sigma_k \rho d\xi d\alpha d\rho + (34) \\
 & + \int_0^t \int_0^{+\infty} \int_0^{2\pi} \left[W_j^0(t-\tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z) g_0(\tau, \rho, \alpha) + \right. \\
 & \left. + W_j^l(t-\tau, r, \rho, \varphi - \alpha, z) g_l(\tau, \rho, \alpha) \right] \rho d\alpha d\rho d\tau; j = \overline{1, n+1},
 \end{aligned}$$

які визначають єдиний розв'язок гіперболічної крайової задачі (1)–(5).

У формулах (34) застосовано компоненти

$$E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi) = \sum_{m=0}^{\infty} \varepsilon_m E_{jk,m}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi) \cos(m\varphi)$$

матриці впливу (функції впливу), компоненти

$$W_j^0(t, r, \rho, \varphi, z) = -\sigma_1 a_{z1}^2 (\alpha_{11}^0)^{-1} E_{j1}(t, r, \rho, \varphi, z, l_0)$$

нижньої аплікратної матриці Гріна (функції Гріна) та компоненти

$$W_j^l(t, r, \rho, \varphi, z) = \sigma_{n+1} a_{z,n+1}^2 (\alpha_{22}^{n+1})^{-1} E_{j,n+1}(t, r, \rho, \varphi, z, l)$$

верхньої аплікратної матриці Гріна розглянутої задачі, де

$$E_{jk,m}(t, r, \rho, z, \xi) = \frac{1}{2\pi} \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{+\infty} \frac{\sin(\Delta(\lambda, \lambda_s)t)}{\Delta(\lambda, \lambda_s)} J_m(\lambda r) \times \\ \times J_m(\lambda \rho) \lambda d\lambda \frac{V_j(z, \lambda_s) V_k(\xi, \lambda_s)}{\|V(z, \lambda_s)\|^2}; j, k = \overline{1, n+1}.$$

З використанням властивостей функцій впливу $E_{jk}(t, r, \rho, \varphi, z, \xi)$ і функцій Гріна $W_j^0(t, r, \rho, \varphi, z)$, $W_j^l(t, r, \rho, \varphi, z)$ безпосередньо перевіряється, що функції $u_j(t, r, \varphi, z)$, визначені формулами (34), задовольняють рівняння (1), початкові умови (2), крайові умови (3), (5) та умови спряження (4) в сенсі теорії узагальнених функцій [24].

Єдиність розв'язку (34) випливає із його структури та єдиності головних розв'язків задачі (функцій впливу і функцій Гріна).

Можна довести [25], що при певних обмеженнях на вихідні дані задачі (1)–(5), узагальнений розв'язок (34) буде також її обмеженим класичним розв'язком.

Зауваження 1. У випадку $a_{rj} = a_{zj} \equiv a_j > 0$ формули (34) визначають структуру розв'язку гіперболічної крайової задачі (1)–(5) в ізотропному кусково-однорідному циліндричному шарі.

Зауваження 2. Параметри α_{11}^0 , β_{11}^0 ; α_{22}^{n+1} , β_{22}^{n+1} дозволяють виділяти із формул (34) розв'язки крайових задач у випадках задання на поверхнях $z = l_0$, $z = l$ крайових умов 1-го, 2-го й 3-го роду та їх можливих комбінацій (1-1, 1-2, 1-3, 2-1, 2-2, 2-3, 3-1, 3-2, 3-3).

Зауваження 3. Аналіз розв'язку (34) в залежності від аналітичного виразу функцій $f_j(t, r, \varphi, z)$, $g_j^1(r, \varphi, z)$, $g_j^2(r, \varphi, z)$, $g_0(t, r, \varphi)$, $g_l(t, r, \varphi)$ проводиться безпосередньо.

Зауваження 4. У випадку $\chi_j^2 \equiv 0$ рівняння (1) є класичним тривимірним неоднорідним хвильовим рівнянням (рівнянням коливань) для ортотропного середовища у циліндричній системі координат.

Зауваження 5. У випадку $\alpha_{11}^k = 0, \beta_{11}^k = 1; \alpha_{12}^k = 0, \beta_{12}^k = 1; \alpha_{21}^k = E_1^k, \beta_{21}^k = 0; \alpha_{22}^k = E_2^k, \beta_{22}^k = 0$, де E_1^k, E_2^k — модулі Юнга, $k = \overline{1, n}$, умови спряження (5) з класичними умовами ідеального механічного контакту.

Таким чином, у зазначених випадках, розглянута гіперболічна крайова задача математичної фізики (1)–(5) є математичною моделлю коливних процесів у кусково-однорідному циліндричному шарі.

Висновки. Методом інтегральних і гібридних інтегральних перетворень у поєднанні з методом головних розв'язків (функцій впливу та функцій Гріна) вперше побудовано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку гіперболічної крайової задачі математичної фізики в кусково-однорідному циліндричному шарі. Одержаний розв'язок носить алгоритмічний характер, неперервно залежить від параметрів і даних задачі й може бути використаний як в подальших теоретичних дослідженнях, так і в практиці інженерних розрахунків реальних процесів, які моделюються гіперболічними крайовими задачами математичної фізики кусково-однорідних середовищ.

Список використаних джерел:

1. Адамар Ж. Задача Коши для линейных уравнений с частными производными гиперболического типа / Ж. Адамар. — М. : Наука, 1978. — 352 с.
2. Городецький В. В. Граничні властивості гладких у шарі розв'язків рівнянь параболічного типу / В. В. Городецький. — Чернівці : Рута, 1998. — 225 с.
3. Миранда К. Уравнения с частными производными эллиптического типа / К. Миранда. — М. : ИЛ, 1957. — 256 с.
4. Матійчук М. І. Параболічні та еліптичні крайові задачі з особливостями / М. І. Матійчук. — Чернівці : Прут, 2003. — 248 с.
5. Смирнов М. М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения / М. М. Смирнов. — М.: Наука, 1966. — 292 с.
6. Подстригач Я. С. Термоупругость тел неоднородной структуры / Я. С. Подстригач, В. А. Ломакин, Ю. М. Коляно. — М. : Наука, 1984. — 368 с.
7. Дейнека В. С. Модели и методы решения задач с условиями сопряжения / В. С. Дейнека, И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий. — К. : Наук. думка, 1998. — 614 с.
8. Сергиенко И. В. Математическое моделирование и исследование процессов в неоднородных средах / И. В. Сергиенко, В. В. Скопецкий, В. С. Дейнека. — К. : Наук. думка, 1991. — 432 с.
9. Коляно Ю. М. Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю. М. Коляно. — К. : Наук. думка, 1992. — 280 с.
10. Перестюк М. О. Теорія рівнянь математичної фізики / М. О. Перестюк, В. В. Маринець. — К. : Либідь, 2006. — 424 с.
11. Ленюк М. П. Температурні поля в плоских кусково-однорідних ортотропних областях / М. П. Ленюк. — К. : Ін-т математики НАН України, 1997. — 188 с.
12. Конет І. М. Стационарні та нестационарні температурні поля в ортотропних сферичних областях / І. М. Конет. — К. : Ін-т математики НАН України, 1998. — 209 с.
13. Конет І. М. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2001. — 312 с.
14. Конет І. М. Температурні поля в кусково-однорідних циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк. — Чернівці : Прут, 2004. — 276 с.
15. Конет І. М. Інтегральні перетворення та диференціальні рівняння з узагальненим оператором Лежандра / І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка-Світ, 2007. — 136 с.

16. Громик А. П. Стационарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка — Світ, 2008. — 120 с.
17. Громик А. П. Нестационарні задачі теплопровідності в кусково-однорідних просторових середовищах / А. П. Громик, І. М. Конет. — Кам'янець-Подільський : Абетка — Світ, 2009. — 120 с.
18. Громик А.П. Температурні поля в кусково-однорідних просторових середовищах / А.П. Громик, І.М. Конет, М.П. Ленюк. — Кам'янець-Подільський : Абетка — Світ, 2011. — 200 с.
19. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених двоскладових циліндричних областях / І. М. Конет // Математичний вісник НТШ. — 2010. — Т.7. — С. 89–110.
20. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових циліндричних областях / І. М. Конет, М. П. Ленюк // Гіперболічні крайові задачі в необмежених тришарових областях. — Львів, 2011. — 48 с. — (Препр./ НАН України Ін-т прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача; 01.11). — Чернівці : Прут, 2011. — С. 5–17.
21. Конет І. М. Гіперболічні крайові задачі в кусково-однорідних циліндричних півпросторах / І. М. Конет // Волинський математичний вісник. Серія прикладна математика. — 2011. — Вип. 8 (17). — С. 93–108.
22. Трантер К. Дж. Интегральные преобразования в математической физике / К. Дж. Трантер. — М. : Гостехтеориздат., 1956. — 204 с.
23. Ленюк М. П. Интегральные преобразования с разделёнными переменными (Вебера, Фурье-Бесселя, Лежандра-Фурье) / М. П. Ленюк. — К., 1983. — 56 с. — (Препр. / АН УССР. Институт математики; 83.18).
24. Шилов Г. Е. Математический анализ. Второй специальный курс / Г. Е. Шилов. — М. : Наука, 1965. — 328 с.
25. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. — М. : Физматгиз., 1958. — 274 с.

The method of integrated and hybrid integral transformations in combination with the method of main solutions (matrices influence and matrix Green) was first built in the exact analytical solution of hyperbolic boundary value problem of mathematical physics in piecewise homogeneous cylindrical layer.

Key words: *hyperbolic equation, initial and boundary conditions, conditions of conjugation, integral transforms, main solutions.*

Отримано: 20.03.2014

УДК 519.21+62

В. Р. Кукурба*, аспірант,**Я. М. Чабанюк****, д-р фіз.-мат. наук, професор

*Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів,

**Львівський державний університет безпеки життєдіяльності, м. Львів

ПРОЦЕДУРА СТОХАСТИЧНОЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ДЛЯ МОДЕЛІ ТЕСТУВАННЯ З НАПІВМАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯМИ

Розглянуто оптимізаційну процедуру для моделі тестування програмного продукту. Стохастичний процес виявлення помилок описаний з допомогою напівмарковського процесу.

Ключові слова: *модель тестування, процедура стохастичної оптимізації, напівмарковський процес.*

Вступ. Дослідження, вдосконалення та аналіз моделей тестування надійності програмного забезпечення (ПЗ) та комп'ютерної техніки в цілому зумовлене створенням нових та вдосконалення існуючих технологій побудови програмних продуктів, розширенням спектру використання автоматизованих систем в сучасному світі, що є передумовою паралельного розвитку усіх складових процесу побудови та впровадження ПЗ в процеси життєдіяльності людини. Підвищення складності та багатокомпонентності сучасних програмних проектів вимагають спеціалізованого підходу під час створення та застосування. В нас час техніка, автоматизовані системи, ПЗ повинні досягати високого рівня надійності, що дозволяє їм ставати ефективним інструментом в світі нових технологій та цілей. Будь яка неполадка може нести за собою серйозні наслідки та втрати, що не припустимо у сучасному світі конкуренції. Саме показник надійності стоїть першим серед не менш важливих показників — якість, живучість, безпека, готовність. Отже збільшення потреб у використанні комп'ютерної техніки у житті людини вимагає більш строго підходу до визначення рівня надійності продукту застосування. Поняття надійності ПЗ не рідко виділяють окремо [1], оскільки при застосуванні цього поняття до програмних засобів враховують особливості і відмінності цих об'єктів від стандартних (традиційних) технічних систем, для яких в першу чергу розробляється теорія надійності. Першочергова і фундаментальна відмінність програмних проектів від технічних засобів та систем полягає в тому, що програмний продукт не тільки не зношується з часом, що відбувається з технікою, а ще й те, що в результаті процесу використання виявляються та усуваються помилки, не говорячи про можливість модернізації шляхом розширення програми за рахунок нових модулів. Також підвищуються вимоги до надійності та витривалості програм, виникають задачі опти-

мізації процесу тестування, якісного прогнозування надійності програмного продукту. Для розв'язування подібних задач оцінки та прогнозування в даний час використовуються моделі надійності ПЗ [1–3]. Розвиток програмних технологій та програмування в цілому зумовлює потребу розвитку таких моделей. Постають задачі побудови нових моделей, вдосконалення існуючих шляхом пошуку нових параметрів, що зумовлять підвищення ступеня адекватності реальним програмним об'єктам, а також тестування таких моделей в реальних умовах. Важливою складовою кожної моделі тестування програмного продукту є критерій достатності процесу тестування, який дозволяє керівникам проєктів приймати обґрунтовані рішення про завершення даного етапу розробки. В даний час у переважній більшості ІТ компаній такі показники (критерії) носять скоріше якісний та неформалізований характер, що є невиправданим при розробці ПЗ відповідального призначення. Отже пошук та дослідження критерію достатності процесу тестування є актуальною задачею програмної інженерії.

1. Зв'язок між розподілом помилок та марковським і напівмарковським процесом. Розглядаються моделі, в основі яких лежить пуассонівський розподіл кількості помилок на інтервалах тестування програмного продукту. Такі моделі розглядаються в наступних роботах: Jelinski-Moranda [4], Schick-Wolverton [5], Shooman [6], Musa [7], Goel-Okumoto, Schneidewind [7] S-подібна модель зростання надійності, узагальнена модель негомогенного пуассонівського процесу. Припускається, що кількість виявлення помилок у моделі оцінювання та прогнозування надійності ПЗ розподілений за законом Пуассона. Перевага моделі на основі кількості помилок над моделлю на основі часу між ними полягає в тому, що визначення часу між окремими помилками може мати куди меншу точність та більшу похибку за рахунок стороннього впливу на перших етапах тестування, на відміну від сумарних результатів на тестовому проміжку. З іншої точки зору дослідження часу між помилками може мати свої переваги при оцінці кінцевих етапів тестування, де кількості виявлених помилок відчутно зменшуються. У попередніх роботах [4–7] отримано результати, що описують процес тестування ПЗ, а також дають змогу отримати оцінку на граничних інтервалах часу. Дані результати базуються на отриманій статистиці з процесу тестування. В ході подальших досліджень виявлено, що з моменту переходу кількостей помилок до неоднорідного пуассонівського розподілу час між подіями відповідає неоднорідному експоненційному закону розподілу.

Розглянемо випадок, коли кількості помилок на тестових ітераціях відповідають закону розподілу Пуассона.

Нехай $P_n(t)$ — ймовірність того, що $X(t) = n$, розподіл $P_n(t)$ залежить від неперервного параметра t . Отже, кількості помилок описуються розподілом Пуассона:

$$P_n(t) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t}. \quad (1)$$

Розглянемо стохастичний процес, представлений випадковим натуральним числом $X(t)$. Приріст $X(t+s) - X(0)$ на інтервалі від 0 до $t+s$ є сумою приростів $X(s) - X(0)$ і $X(t+s) - X(s)$ на відповідних інтервалах. Ми припускаємо, що прирости $X(s) - X(0)$ і $X(t+s) - X(s)$ незалежні, і що розподіл $X(t+s) - X(s)$ залежить тільки від довжини тестового інтервалу а не від його положення на тестовому проміжку (в даному контексті слід розуміти тільки той тестовий проміжок, кількості помилок на якому відповідають закону Пуассона). На віддалених етапах тестування, нас цікавить, не тільки кількість помилок на проміжку, а й час між помилками, тобто виконання умови $X(t+s) - X(t) = 0$, де s час, що минув після виявлення останньої помилки, тобто ймовірність, що час s менший за час до настання наступної помилки. Це відповідає випадку з розподілу Пуассона, коли $n = 0$:

$$P_0(t) = e^{-\lambda t}. \quad (2)$$

У результаті отримано наступну щільність $f(t) = e^{-\lambda t}$ часу між помилками на пізніх етапах тестування, що відповідає експоненційному закону розподілу, який визначає час перебування у станах марковського процесу. Останній результат дає змогу моделювати подальшу поведінку процесу тестування. З моделі отримуються значення параметра λ , яке можна використати для моделювання ланцюга Маркова, що породжує досліджуваний процес.

У випадку напівмарковського процесу розглядається відповідність кількостей помилок на тестових ітераціях неоднорідному пуассонівському розподілу. При цьому закон розподілу часових проміжків між виявленням помилок може описуватися функцією розподілу відмінною від експоненційної.

У цій статті розглядається функція інтенсивності моделі тестування програмного продукту з індексом величини проекту [1].

2. Аналіз математичної моделі тестування програмного продукту з індексом величини проекту. Математична модель надійності програмного забезпечення створюється для оцінки залежності надійності програмного забезпечення від деяких параметрів, пов'язаних з модулями програми на підмножині наборів вхідних даних, за допомогою, яких цей модуль контролюється [1]. До інших таких параметрів відносяться частота помилок, що дає змогу оцінити якість систем реального часу, що працюють в неперервному режимі, і в той же час паралельно отримувати інформацію про надійність програмних про-

дуктів [3]. Розглянута модель відноситься до класу моделей на основі кількості помилок. Припускається, що кількість виявлення помилок у моделі оцінювання та прогнозування надійності ПЗ розподілений за неоднорідним законом Пуассона. Крім того вважається, що індекс величини проекту є параметром моделі та визначається на основі експериментальних даних і набуває значення з дійсного діапазону і завжди більший від нуля. Функція інтенсивності виявлення помилок для даної моделі [3] має наступний вигляд

$$\lambda(t) = \alpha \beta^{s+1} t^s \exp(-\beta t), \quad (3)$$

де α — коефіцієнт, що характеризує загальну кількість помилок в ПЗ, β — коефіцієнт, що характеризує загальну тривалість процесу виявлення помилок, s — індекс величину проекту.

Згідно з [1] для (3) визначена функція кумулятивної кількості помилок до моменту t

$$\mu(t) = \int_0^t \lambda(\tau) d\tau = \alpha \left[s \Gamma_{\beta t}(s) - \beta^s t^s e^{-\beta t} \right], \quad (4)$$

де $\Gamma_z(p) = \int_0^z t^{p-1} e^{-t} dt$, $Re(p) > 0$, — неповна гама-функція.

Зауваження 1. При $s = 1$ маємо з (3) та з (4) наступні представлення

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \alpha \beta^2 t \exp(-\beta t), \\ \mu(t) &= \alpha (1 - (1 + \beta t) \exp(-\beta)), \end{aligned}$$

що відповідає S -подібній моделі [7].

Загальна кількість помилок, що міститься в програмному продукті визначається з (4) при $t \rightarrow \infty$

$$\mu(\infty) = \alpha s \Gamma(s), \quad (5)$$

де $\Gamma(s)$ — гама-функція, що також співпадає з S -подібною моделлю.

Таким чином, згідно з основним припущенням та властивостями кумулятивної функції (4), для знаходження параметрів α , β та s будемо функцію максимальної правдоподібності

$$L(\alpha, \beta, s) = \prod_{i=1}^n \frac{[\mu(t_i) - \mu(t_{i-1})]^{m_i}}{m_i!} \exp(\mu(t_{i-1}) - \mu(t_i)), \quad (6)$$

де m_i , $\left(\sum_{i=1}^n m_i = k \right)$, — кількість виявлених помилок на інтервалі $(t_i; t_{i+1}]$, $i = \overline{0, n}$. Отже, аналітичний вигляд побудованої моделі дозволяє узагальнити вираз для загальної кількості помилок в системі (6), яка залежить від величини та складності проекту і визначається параметрами

моделі. Рівняння (3) та (4) називають моделлю з індексом величини проекту [3]. Особливістю досліджуваної моделі є третій динамічний параметр, який описує індекс величини програмного проекту, що відсутній у всіх існуючих моделей [4–7]. Під величиною проекту розуміють комплексний показник, який корелює з метриками складності коду програмного продукту [1]. Встановлення залежності між індексом величини проекту та метриками складності коду є предметом подальших досліджень. Для визначення параметрів α, β, s побудованої моделі використовується метод максимальної правдоподібності.

Критерій достатності процесу тестування ПЗ. Важливим прикладним аспектом моделі надійності ПЗ є встановлення кількісного критерію достатності процесу тестування програмного продукту, який дозволяє керівникам програмних проектів більш обґрунтовано приймати рішення про виділення ресурсів на тестування та про завершення цього етапу розробки ПЗ. Так, на даний час, у переважній більшості ІТ компаній такі показники носять скоріше якісний та неформалізований характер на зразок «задоволення замовника», які жодним чином не можна використовувати, наприклад, при розробці ПЗ відповідального призначення. На протигагу до параметрів α та β , залежність індексу величини проекту (який відсутній в усіх інших моделях на основі розподілу Пуассона) виявляє чітку особливість, яку можна покласти в основу критерію достатності процесу тестування. Ця особливість полягає в тому, що при переході до пуассонового розподілу кількості виявлення помилок залежність $s(t)$ стає гладкою, а значення наближається до постійної величини. Таку поведінку залежності $s(t)$ можна зрозуміти, врахувавши, що індекс величини проекту (параметр моделі) є основним параметром, що визначає форму і функцію розподілу, а відповідно і щільність ймовірності випадкової величини, яка у нашому випадку є кількістю виявлення помилки. Отже, на пізніх етапах тестування ПЗ, коли корельовано помилки виявлені та усунені, а час виявлення тих помилок, що залишилися відповідає пуассоновому розподілу, якісна характеристика розподілу (параметр $s(t)$) вже практично не змінюється, а змінюються в основному кількісні характеристики (параметри α та β). Таким чином, з використанням критерію достатності процесу тестування можна визначити загальну кількість помилок в програмному продукті за допомогою рівняння (6) і порівнявши її з кількістю вже виявлених та виправлених помилок прийняти обґрунтоване рішення про розподіл ресурсів проекту зі створення програмного продукту.

3. Процедура стохастичної оптимізації в задачі тестування програмного продукту. В даному підрозділі розглядається неперервна процедура стохастичної оптимізації для індексу величини програмного продукту при тестуванні на знаходження помилок в матема-

тичній моделі тестування програмного забезпечення на основі кількості помилок [4; 5]. Отримано умови збіжності процедури до асимптотичних значень індексу при неповному тестуванні з моменту виходу кількості помилок на розподіл Пуассона.

При безпосередній залежності функції регресії від зовнішнього середовища, що описується напівмарковськими переключеннями, розглянуто процедуру стохастичної оптимізації [8]

$$\frac{du(t)}{dt} = a(t)\nabla_{b(t)}C(u(t); x(t)), u \in R, \quad (7)$$

де

$$\nabla_{b(t)}C(u(t); x(t)) := \frac{C(u(t) + b(t); x(t)) - C(u(t) - b(t); x(t))}{2b(t)},$$

а $x(t), t \geq 0$, рівномірно ергодичний напівмарковський процес у вимірному фазовому просторі станів (X, \mathcal{X}) з стаціонарним розподілом $\pi(B), B \in \mathcal{X}$ [10].

У цьому випадку експериментатор має можливість отримати асимптотично оптимальний результат навіть при відомій функції регресії, та при всіх значеннях напівмарковського процесу $x(t), t \geq 0$ [9; 10]. Доведення збіжності процедури стохастичної оптимізації (7) з ймовірністю 1, а саме

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} u(t) = u_0\} = 1$$

проводиться з використанням асимптотичних властивостей генератора двокомпонентного марковського процесу $u^\varepsilon(t), x(t/\varepsilon), t \geq 0, \varepsilon > 0$ — малий параметр серій, розв'язку проблеми сингулярного збурення та застосування теореми Невельсона-Хасьмінського ([9], Теорема 2.8.1, стор. 100).

Отже, важливим кроком застосування процедури стохастичної оптимізації (7) є встановлення природи стохастичності, що входить в функцію регресії $C(u; x)$.

Основною метою роботи є встановлення можливості використання процедури стохастичної оптимізації (7) для отримання асимптотичних значень індексу величини програмного проекту з функцією інтенсивності виявлених помилок, що запропонована в [1]. У першій частині даного підрозділу досліджуються стохастичні властивості точкових оцінок запропонованої моделі опису процесу тестування програмного продукту, а в другій — проводиться аналіз щодо застосування процедури стохастичної оптимізації (7) для індексу величини проекту.

4. Процедура стохастичної оптимізації для індексу величини проекту. Оскільки α, β та s в (3) визначається під дією процесу Пуассона кількості помилок на сусідніх інтервалах, визначимо мож-

лівість побудови процедури стохастичної оптимізації для них. Лінійність функції інтенсивності $\lambda(t)$ відносно α не дозволяє отримати таку процедуру. Тому $\hat{\alpha}$, отримане з моделі є постійним для процедури стохастичної оптимізації відносно параметрів β та s . З іншої сторони з природи параметру β в (3) слідує, що він змінюється мало при наборі достатньої статистики помилок при тестуванні (перехід кількості виявлених помилок на сусідніх інтервалах $(t_i; t_{i+1}], (t_{i+1}; t_{i+2}]$ до розподілу Пуассона), що підтверджують експериментальні данні.

Таким чином, отримуємо єдино можливу процедуру стохастичної оптимізації для параметра s з функцією регресії

$$\lambda(s, t) = \hat{\alpha} \hat{\beta}^{s+1} t^s \exp(-\hat{\beta}t). \quad (8)$$

Згідно властивостей точкових оцінок $\hat{\alpha}$, $\hat{\beta}$ (при великих n та k) отримуємо їх незміщеність відносно α та β . З іншої сторони α та β змінюються під впливом напівмарковського процесу виявлення помилок.

Отже, отримуємо процедуру стохастичної оптимізації згідно (7) параметра s

$$\frac{ds(t)}{dt} = \frac{a(t)}{2b(t)} \left[\hat{\alpha} \hat{\beta}^{s(t)+b(t)+1} t^{s(t)+b(t)} e^{-\hat{\beta}t} - \right. \\ \left. - \hat{\alpha} \hat{\beta}^{s(t)-b(t)+1} t^{s(t)-b(t)} e^{-\hat{\beta}t} \right]. \quad (9)$$

Функція інтенсивності виявлення помилок $\lambda(s, t)$ згідно (8) має єдиний максимум.

Теорема. Якщо функції $a(t) > 0, b(t) > 0$ задовольняють умовам

$$\int_{t_0}^{\infty} a(t) dt = \infty, \int_{t_0}^{\infty} a^2(t) dt < \infty, \int_{t_0}^{\infty} a(t)b(t) dt < \infty, t_0 > 0, \quad (10)$$

то для процедур стохастичної оптимізації (11) має місце збіжність

$$P\{\lim_{t \rightarrow \infty} s(t) = s_0\} = 1, \quad (11)$$

де s_0 таке, що

$$\max \lambda(s, t) = \lambda(s_0, t).$$

Зауваження 2. Відзначимо, що умови (10) з одної сторони дозволяють рухатись випадковій еволюції $u(t)$ до точки $u = u_0$, а з другої сповільнити цей рух таким чином, щоб встигнути досягнути точку $u = u_0$ при $t \rightarrow \infty$.

Доведення. Збіжність з ймовірністю 1 (11) слідує з гладкості функції $\lambda(s, t)$, тобто виконання умови Ліпшица в формі

$$|\nabla_{b(t)}\lambda(s,t) - \lambda'_s(s,t)| \leq cb(t),$$

умов (10) та твердження теореми збіжності ПСО (7) [8].

5. Дослідження процедури на реальних даних. Були проведені дослідження даних отриманих з реальних тестувань програмного забезпечення. Дані тестування були розбиті на 5 груп, по типах помилок: Trivial, Minor, Major, Critical, Bloker. Також були визначені рівномірні моменти часу для яких визначалась статистика, всього 1300 ітераційних моментів. Враховуючи різну природу цих помилок, кожен тип розглядався окремо і отримано наступні результати.

Таблиця 1

Тип	\hat{S}	S (ПСО)	Виявлено помилок	Очікувана к-сть (ПСО)
Trivial	0.154	0.16	56	66.747
Minor	0.144	0.201	479	573.506
Major	0.122	0.296	1204	1516.043
Critical	0.139	0.222	666	801.526
Bloker	0.153	0.166	122	145.205

У таблиці представлені значення критерію достатності процесу тестування для останнього значення отриманого з моделі \hat{S} , що визначається з (6) та граничного отриманого з процедури S з формули (9), а також виявлена кількість помилок та очікувана кількість помилок, яка визначається з врахування результатів отриманих за допомогою процедури та формули (5).

З результатів дослідження видно, що процес тестування не вийшов на фінальну стадію, і його необхідно продовжити, це слідує з відмінності між отриманими критеріями з моделі та з процедури, а також з різниці між виявленою кількістю помилок та очікуваною. Варто відзначити доцільність окремого дослідження кожного типу помилок, оскільки програмний проект може спеціалізуватися на різнопланових завданнях, що можуть викликати різну складність проекту відносно типів помилок.

Результати дослідження на різних ітераційних проміжках для типу помилок Bloker. Помилки цього типу на проміжках тестових ітерацій виявлялися в незначних кількостях (1-2 на 100 ітерацій).

Таблиця 2

Ітерації	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{S}	S ПСО	Помилки модель	Помилки ПСО
800	167.141	0.001725	0.166	0.179	155.11	154.441
900	165.905	0.001692	0.163	0.176	154.125	153.446
1000	162.914	0.001645	0.158	0.172	151.581	151.581
1100	159.694	0.00162	0.156	0.169	148.71	148.037
1200	156.419	0.001611	0.155	0.168	145.704	145.049
1300	156.484	0.001589	0.153	0.166	145.874	145.2051

Результати дослідження на різних ітераційних проміжках для типу помилок Minog. Помилки цього типу з'являлися частіше ніж розглянутого вище.

Таблиця 3

Іте- рацій	Ви- явле- но	$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	\hat{S}	S ПСО	Помилки модель	По- милки ПСО
800	413	600.035	0.001613	0.155	0.207	558.884	549.837
900	432	611.636	0.001584	0.152	0.206	570.241	560.625
1000	460	639.238	0.001538	0.148	0.205	596.906	586.09
1100	465	631.897	0.00152	0.146	0.203	590.422	579.689
1200	468	621.389	0.001518	0.146	0.202	580.654	570.211
1300	479	624.8	0.0015	0.144	0.201	584.192	573.506

У таблицях показані результати, на кількох проміжних інтервалах, що відображають зміну значень параметрів моделі та граничних значень процедури.

Висновки. Побудовано процедуру стохастичної оптимізації для індексу величини програмного продукту, а саме для параметру s , який є критерієм достатності процесу тестування програмного забезпечення з врахуванням стохастичності процесу тестування. Створена процедура дозволяє оцінити кількість залишкових помилок, що в свою чергу дає можливість передбачити матеріальні витрати на тестування та його доцільність.

Під час досліджень було виявлено, що модель аналізу процесу тестування може бути застосована в реальних умовах при відповідній строгості до документації процесу тестування та на кінцевих етапах розробки програмного коду, бета-тестуваннях. Найефективніше використання розробленої процедури при регресивному тестуванні з використанням автоматизованих тестів.

Складність процесу розробки сучасного програмного забезпечення підвищує складність процесу тестування, що в свою чергу потребує ефективних об'єктів для опису таких процесів. Отже використання напівмарковського процесу в моделях тестування програмного продукту дає переваги в застосуванні таких моделей.

Список використаних джерел:

1. Побудова і дослідження моделі надійності програмного забезпечення з індексом складності проекту / Я. М. Чабанюк, В. С. Яковина, Д. В. Федасюк та ін. // Інженерія програмного забезпечення. Науковий журнал. — К., 2010. — № 1. — С. 24–29.
2. Оптимізація моделі тестування програмного забезпечення з показником величини проекту / Я. М. Чабанюк, В. Р. Кукурба, Л. Б. Гнатів та ін. // Ві-

- сник НУ «ЛП» серія «Комп'ютерні науки та інформаційні технології» — № 694 — С. 81–89.
3. Оцінювання та прогнозування надійності програмного забезпечення на основі моделі з індексом складності проекту / В. С. Яковина, Я. М. Чабанюк, М. М. Сенів, У. Т. Хімка // Вісник Хмельницького національного університету. Технічні науки. — 2011. — № 2. — С. 152–160.
 4. Does software reliability growth behavior follow a non-homogeneous Poisson process / K.-Y. Cai, D.-B. Hu, Ch.-G. Bai, H. Hu, T. Jing // Information and Software Technology. — 2008. — Vol. 50. — P. 1232–1247.
 5. Goel A. L. Software reliability models: assumptions, limitations, and applicability / A. L. Goel // IEEE Transactions on software engineering. — 1985. — Vol. SE-11, № 12. — P. 1411–1423.
 6. Van Pul M. C. J. Statistical analysis of software reliability models / M. C. J. Van Pul // CWI Tract. — Amsterdam, 1991. — 211 p.
 7. Yamada S. S-shaped reliability growth modelling for software error detection / S. Yamada, M. Ohba, S. Osaki // IEEE Transactions on Reliability. — 1983. — Vol. R-32, No. 5. — P. 475–478.
 8. Кукурба В. Р. Збіжність одновимірної процедури стохастичної оптимізації в напівмарковському середовищі / В. Р. Кукурба, У. Б. Ярка // Прикладна статистика. Актуарна та фінансова математика : наук. журнал, Донецький нац. ун-т. — 2012. — №1. — С. 64–70.
 9. Невельсон М. Б. Стохастическая аппроксимация и рекуррентное оценивание / М. Б. Невельсон, Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1972. — 304 с.
 10. Korolyuk V. S. Stochastic Models of Systems / V. S. Korolyuk, V. V. Korolyuk. — Kluwer : Dordrecht, 1999. — 185 p.

Optimization procedure for testing model was considered. Stochastic process of errors finding was described using of semi-Markov process.

Key words: *testing model, stochastic optimization procedure, semi-Markov process.*

Отримано: 10.03.2014

УДК 517.9

В. П. Лісовська, канд. фіз.-мат. наук,**О. І. Неня**, канд. фіз.-мат. наук

Київський національний економічний університет

імені Вадима Гетьмана, м. Київ

ДОСЛІДЖЕННЯ ЕКСПОНЕНЦІАЛЬНОЇ СТІЙКОСТІ РОЗВ'ЯЗКІВ РІВНЯННЯ МАККІ-ГЛАССА З ІМПУЛЬСНОЮ ДІЄЮ

Розглядається функціонально-диференціальне рівняння Маккі-Гласса зі змінними коефіцієнтами, несталим запізненням та імпульсним впливом в фіксовані моменти часу. На основі теорем типу Разуміхіна, отримано умови експоненціальної стійкості додатних розв'язків даного рівняння.

Ключові слова: функціонально-диференціальне рівняння, імпульсна дія, експоненціальна стійкість.

Постановка задачі. Розглянемо нелінійне функціонально-диференціальне рівняння Маккі-Гласса з імпульсною дією

$$\dot{x}(t) = \frac{p(t)x(g(t))}{1 + x^n(g(t))} - \delta(t)x(t), \quad t \neq t_k, \quad (1)$$

$$x(t_k^+) = (1 + b_k)x(t_k), \quad k \in N, \quad (2)$$

де $n > 0$, $b_k > -1$, $p(t) \geq 0$, $\delta(t) > 0$, $g(t)$ — кусково-неперервні функції, $g(t) < t$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$, $\limsup_{t \rightarrow \infty} (t - g(t)) < \infty$, послідовність точок

імпульсної дії задовольняє умови $t_{k+1} - t_k > 0$, $k \in N$.

Рівняння Маккі-Гласса було представлено як модель гематопоезу (відтворення клітин крові) у роботі [1]. Дослідження даного рівняння та деяких схожих моделей широко висвітлені в публікаціях [2–4]. Рівняння Маккі-Гласса із запізненням описує модель генерації білих кров'яних тілець [5–6], а імпульсна дія характеризує короткочасні зовнішні впливи на систему [7–8].

Основними питаннями, що досліджуються в вищезгаданих дже-релах, є існування періодичних розв'язків, властивість перманентності розв'язку, локальний та глобальний аналіз стійкості розв'язків.

У цій статті за допомогою теорем типу Разуміхіна досліджується властивість експоненціальної стійкості розв'язків рівняння (1), (2).

Під розв'язком рівняння (1) з початковим значенням

$$x(t) = \varphi(t), \quad t < t_0, \quad x(t_0) = x_0 > 0, \quad (3)$$

де $\varphi: (-\infty, t_0) \rightarrow R$, $\varphi(t) \geq 0$ — кусково-неперервна, обмежена функція, розуміємо абсолютно неперервну на кожному інтервалі $(t_j, t_{j+1}]$

функцію, яка задовольняє рівняння (1) майже скрізь, а також задовольняє умови імпульсів (2).

Виходячи з біологічної інтерпретації даного рівняння, розглядаємо розв'язки, які приймають невід'ємні значення.

Допоміжні результати. Нехай R — простір дійсних чисел, R_+ — простір невід'ємних дійсних чисел, R^n — n -вимірний простір з евклідовою нормою $\|\cdot\|$.

Розглянемо функціонально-диференціальне рівняння з імпульсною дією

$$\dot{x}(t) = f(t, g(t)), \quad t \geq t_0, \quad t \neq t_k, \quad (4)$$

$$x(t_k^+) = I_k(t_k, x(t_k)), \quad t = t_k, \quad k \in N,$$

де $x \in R^n$, $f, I_k : R_+ \times PC((-\infty, t_0], R^n) \rightarrow R^n$, $f(t, 0) = 0$, $I_k(t_k, 0) = 0$, $g(t)$ — кусково-неперервна функція, $g(t) < t$, $\lim_{t \rightarrow \infty} g(t) = \infty$,

$\limsup_{t \rightarrow \infty} (t - g(t)) < \infty$, послідовність точок імпульсної дії задовольняє умови $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_k < \dots$, $t_{k+1} - t_k > 0$.

Позначимо через $PC([a, b], S)$ простір означених на відрізку $[a, b]$ кусково-неперервних неперервних зліва функцій зі значеннями в S та зі скінченною кількістю розривів.

Тоді

$$PC((-\infty, b], S) = \left\{ \psi : (-\infty, b] \rightarrow S \mid \forall a < b, \psi|_{[a, b]} \in PC([a, b], S) \right\}.$$

Означимо простір $PCB(t)$ неперервних обмежених функцій. В якому для $\psi \in PCB(t)$ введемо норму $\|\psi\|_0 = \sup_{s \leq 0} |\psi(s)|$. Для кожного

$\sigma \geq 0$ нехай $PCB_\sigma(\sigma) = \{\psi \in PCB(\sigma) : \|\psi\| \leq \sigma\}$.

Функцію $x(t)$ назвемо розв'язком рівняння (4) з початковою умовою

$$x(t) = \varphi(t), \quad t < t_0, \quad (5)$$

де $\varphi : (-\infty, t_0) \rightarrow R$ — кусково-неперервна, обмежена функція, якщо $x(t, t_0, \varphi)$ задовольняє (4) та (5).

Під розв'язком рівняння (4) розуміємо абсолютно неперервну на кожному інтервалі $(t_j, t_{j+1}]$ функцію, яка задовольняє рівняння (4) майже скрізь, а також задовольняє умови імпульсів.

Оскільки $f(t, 0) = 0$, $I_k(t_k, 0) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, то $x(t) = 0$ розв'язок рівняння (4), (5), який назвемо тривіальним розв'язком.

Означення 1. Функція $V : R_+ \times R^n \rightarrow R_+$ належить класу v_0 якщо:

- (i) V — неперервна на кожній множині $(t_{k-1}; t_k] \times R^n$ функція і для кожного значення $x \in R^n$, $t \in (t_{k-1}; t_k]$, $k \in N$ існує

$$\lim_{(t,y) \rightarrow (t_k^+, x)} V(t, y) = V(t_k^+, x);$$

- (ii) $V(t, x)$ — локально ліпшицева для всіх $x \in R^n$, і для всіх $t \geq t_0$ виконується рівність $V(t, 0) = 0$.

Означення 2. Лівостороння похідна функції $V : R_+ \times R^n \rightarrow R_+$ по відношенню до системи (4) визначається таким чином

$$D^-V(t, \psi(0)) = \limsup_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} [V(t+h, \psi(0) + hf(t, \psi)) - V(t, \psi(0))],$$

для $(t, \psi) \in R_+ \times PC((-\infty; 0], R^n)$.

Означення 3. Тривіальний розв'язок системи (4), (5) експоненціально стійкий, якщо для кожного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon)$ та стала $\alpha > 0$, що для довільної початкової функції $\varphi \in PCB_\delta(t_0)$ виконується нерівність

$$\|x(t, t_0, \varphi)\| \leq \varepsilon \cdot e^{-\alpha(t-t_0)}, t \geq t_0.$$

Розглянемо лінійне рівняння

$$\dot{x}(t) = c(t)x(g(t)) - a(t)x(t), t \neq t_k, \quad (6)$$

$$x(t_k^+) = (1 + b_k)x(t_k), t = t_k.$$

з початковою функцією та початковим значенням

$$x(t) = \varphi(t) \geq 0, t < t_0, x(t_0) = x_0 > 0. \quad (7)$$

Введемо в розгляд також відповідні нерівності з імпульсною дією:

$$\dot{y}(t) \leq c(t)y(g(t)) - a(t)y(t), \quad (8)$$

$$y(t_k^+) = (1 + b_k)y(t_k),$$

та

$$g(\tau_1) = t_0, \quad (9)$$

$$w(t_k^+) = (1 + b_k)w(t_k).$$

Лема 1. (Див. [9]) Нехай $a(t) \geq 0$, $c(t) > 0$, $g(t)$ — кусково-неперервні функції. Тоді розв'язок рівняння (6)–(7) додатний. Якщо $x(t) = y(t) = w(t)$, $t \leq t_0$, тоді $y(t) \leq x(t) \leq w(t)$, $t \geq t_0$, де $y(t)$ і $w(t)$ відповідно розв'язки нерівностей (8), (9).

Основні результати.

Теорема 1. Припустимо, що існує функція $V \in v_0$ та такі стали $p > 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$, $\lambda > 0$, що виконуються наступні умови:

- (i) $c_1 \|x\|^p \leq V(t, x) \leq c_2 \|x\|^p$;
- (ii) $V(t_k^+, I_k(t_k, \varphi)) \leq (1 + b_k)V(t_k, \varphi(0))$, $b_k > -1$;
- (iii) $D^-V(t, \varphi(0)) \leq -\lambda V(t, \varphi(0))$, для всіх $t \neq t_k$ на R_+ , якщо

$$V(t, \varphi(0)) \geq \prod_{g(t) \leq t_k < t} (1 + b_k) e^{-\lambda(t-g(t))} V(g(t), \varphi(g(0)));$$
- (iv) $\prod_{g(t) \leq t_k < t} (1 + b_k) e^{-\lambda(t-g(t))} \leq e^{-\xi(t-g(t))}$, $0 \leq \xi < \lambda$,

для всіх $t > t_0$.

Тоді тривіальний розв'язок системи (4) експоненціально стійкий.

Доведення. Нехай $x(t)$ — розв'язок системи (4) і $V(t) = V(t, x(t))$.

Доведемо, що для довільного $t \in (t_{k-1}, t_k]$ виконується нерівність

$$V(t) \leq c_2 \prod_{t_0 \leq t_k < t} (1 + b_k) \|\varphi\|_0^p e^{-\lambda(t-t_0)}. \quad (10)$$

Нехай

$$Q(t) = \begin{cases} V(t) - c_2 \|\varphi\|_0^p e^{-\lambda(t-t_0)}, & t \leq t_0, \\ V(t) - c_2 \prod_{t_0 \leq t_k < t} (1 + b_k) \|\varphi\|_0^p e^{-\lambda(t-t_0)}, & t \in (t_{k-1}, t_k]. \end{cases}$$

Покажемо, що $Q(t) \leq 0$ для всіх $t \geq t_0$.

Очевидно, що $Q(t) \leq 0$ для $t \leq t_0$, оскільки згідно умови (i) маємо оцінку $Q(t) \leq V(t) - c_2 \|\varphi\|_0^p \leq 0$.

Покажемо, що для всіх $t \in (t_0, t_1]$ виконується $Q(t) \leq 0$. Нехай існує довільне число $\alpha > 0$, що для $t \in (t_0, t_1]$ виконується $Q(t) \leq \alpha$. Припустимо, що це не так. Тоді існує таке $t^* = \inf \{t \in (t_0, t_1] : Q(t) > \alpha\}$, що $Q(t^*) = \alpha$, $Q(t^*) \leq \alpha$ для $t \leq t^*$.

Оскільки $V(t^*) = Q(t^*) + c_2 \|\varphi\|_0^p e^{-\lambda(t^*-t_0)}$, то

$$\begin{aligned} V(g(t^*)) &= Q(g(t^*)) + c_2 \|\varphi\|_0^p e^{-\lambda(g(t^*)-t_0)} \leq \\ &\leq \alpha + c_2 \|\varphi\|_0^p e^{-\lambda(t^*-t_0+g(t^*)-t^*)} \leq \end{aligned}$$

$$\leq (\alpha + c_2 \|\varphi\|_0^p e^{-\lambda(t^* - t_0)}) e^{-\lambda(g(t^*) - t^*)} = V(t^*) e^{-\lambda(g(t^*) - t^*)}.$$

Тому згідно умови (iii) маємо $D^-V(t^*) \leq -\lambda V(t^*)$, звідки випливає

$$\begin{aligned} D^-Q(t^*) &= D^-V(t^*) + \lambda c_2 \|\varphi\|_0^p e^{-\lambda(t^* - t_0)} \leq -\lambda V(t^*) + \\ &+ \lambda c_2 \|\varphi\|_0^p e^{-\lambda(t^* - t_0)} = -\lambda \left(V(t^*) - c_2 \|\varphi\|_0^p e^{-\lambda(t^* - t_0)} \right) = -\lambda \alpha < 0, \end{aligned}$$

що протирічить визначенню точки t^* , тобто маємо $Q(t) \leq \alpha$ для всіх $t \in (t_0, t_1]$. Нехай $\alpha \rightarrow 0^+$, тоді $Q(t) \leq 0$ для всіх $t \in (t_0, t_1]$.

Припустимо, що для всіх $t \in (t_0, t_m]$ виконується $Q(t) \leq 0$, і покажемо, що $Q(t) \leq 0$ для $t \in (t_0, t_{m+1}]$.

Згідно умови (ii) маємо, що

$$\begin{aligned} Q(t_m^+) &= V(t_m^+) - c_2 \prod_{t_0 \leq t_k < t_m} (1 + b_k) \|\varphi\|_0^p e^{-\lambda(t_m - t_0)} \leq \\ &\leq (1 + b_m) V(t_m) - c_2 \prod_{t_0 \leq t_k \leq t_m} (1 + b_k) \|\varphi\|_0^p e^{-\lambda(t_m - t_0)} \leq \\ &\leq (1 + b_m) \left(V(t_m) - c_2 \prod_{t_0 \leq t_k < t_m} (1 + b_k) \|\varphi\|_0^p e^{-\lambda(t_m - t_0)} \right) = \\ &= (1 + b_m) Q(t_m) \leq 0. \end{aligned}$$

Нехай існує довільне число $\alpha > 0$ таке, що для $t \in (t_m, t_{m+1}]$ виконується $Q(t) \leq \alpha$. Припустимо, що це не так. Тоді існує таке $t^* = \inf \{t \in (t_m, t_{m+1}]: Q(t) > \alpha\}$, що $Q(t^*) = \alpha$, $Q(t^*) \leq \alpha$ для $t \leq t^*$.

Оскільки $V(t^*) = Q(t^*) + c_2 \|\varphi\|_0^p \prod_{t_0 \leq t_k < t^*} (1 + b_k) e^{-\lambda(t^* - t_0)}$, то

$$\begin{aligned} V(g(t^*)) &= Q(g(t^*)) + c_2 \|\varphi\|_0^p \prod_{t_0 \leq t_k < g(t^*)} (1 + b_k) e^{-\lambda(g(t^*) - t_0)} \leq \\ &\leq \alpha + c_2 \|\varphi\|_0^p \prod_{t_0 \leq t_k < t^*} (1 + b_k) \prod_{g(t^*) \leq t_k < t^*} (1 + b_k)^{-1} e^{-\lambda(t^* - t_0)} e^{-\lambda(g(t^*) - t^*)} \leq \\ &\leq \left(\alpha + c_2 \|\varphi\|_0^p \prod_{t_0 \leq t_k < t^*} (1 + b_k) e^{-\lambda(t^* - t_0)} \right) \prod_{g(t^*) \leq t_k < t^*} (1 + b_k)^{-1} e^{-\lambda(g(t^*) - t^*)} = \\ &= V(t^*) \prod_{g(t^*) \leq t_k < t^*} (1 + b_k)^{-1} e^{-\lambda(g(t^*) - t^*)}. \end{aligned}$$

В останній нерівності при перетвореннях використали умову (iv), з якої випливає, що

$$\prod_{g(t^*) \leq t_k < t^*} (1 + b_k)^{-1} e^{-\lambda(g(t^*) - t^*)} > 1.$$

Тому згідно умови (iii) маємо $D^-V(t^*) \leq -\lambda V(t^*)$, звідки випливає

$$\begin{aligned} D^-Q(t^*) &= D^-V(t^*) + \lambda c_2 \|\varphi\|_0^p \prod_{t_0 \leq t_k < t^*} (1 + b_k) e^{-\lambda(t^* - t_0)} \leq \\ &\leq -\lambda V(t^*) + \lambda c_2 \|\varphi\|_0^p \prod_{t_0 \leq t_k < t^*} (1 + b_k) e^{-\lambda(t^* - t_0)} = \\ &= -\lambda \left(V(t^*) - c_2 \|\varphi\|_0^p \prod_{t_0 \leq t_k < t^*} (1 + b_k) e^{-\lambda(t^* - t_0)} \right) = -\lambda \alpha < 0, \end{aligned}$$

що протирічить вибору точки t^* , тобто маємо $Q(t) \leq \alpha$ для всіх $t \in [t_m, t_{m+1}]$. Нехай $\alpha \rightarrow 0^+$, тоді $Q(t) \leq 0$ для всіх $t \in (t_0, t_{m+1}]$.

Тому згідно методу математичної індукції маємо справедливості оцінки (10).

Далі розіб'ємо інтервал $[t_0; +\infty)$ на інтервали запізнення наступним чином: існує значення τ_1 таке, що $g(t) > t_0$ при $t > \tau_1$, тому $g(\tau_1) = t_0$, тобто маємо інтервал $[t_0, \tau_1)$. Аналогічно будемо інтервал $[\tau_1, \tau_2)$, де $g(\tau_2) = \tau_1$, і т.д.

Виходячи з умов (i)–(iii) та вищеписаного розбиття маємо такі оцінки

$$c_1 \|x\|^p \leq V(t, x) \leq c_2 \prod_{t_0 \leq t_k < t} (1 + b_k) \|\varphi\|_0^p e^{-\lambda(t - t_0)}$$

звідки

$$\|x\| \leq \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_0 \left(\prod_{t_0 \leq t_k < t} (1 + b_k) e^{-\lambda(t - t_0)} \right)^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_0 (\Omega(t))^{\frac{1}{p}},$$

де

$$\begin{aligned} \Omega(t) &= \prod_{t_0 \leq t_k < t} (1 + b_k) e^{-\lambda(t - t_0)} = \\ &= \prod_{t_0 \leq t_k < \tau_1} (1 + b_k) e^{-\lambda(\tau_1 - t_0)} \prod_{\tau_1 \leq t_k < \tau_2} (1 + b_k) e^{-\lambda(\tau_2 - \tau_1)} \times \dots \times \\ &\times \prod_{\tau_m \leq t_k < t} (1 + b_k) e^{-\lambda(t - \tau_m)} = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \prod_{g(\tau_1) \leq t_k < \tau_1} (1+b_k) e^{-\lambda(\tau_1-g(\tau_1))} \prod_{g(\tau_2) \leq t_k < \tau_2} (1+b_k) e^{-\lambda(\tau_2-g(\tau_2))} \times \dots \times \\
 &\times \prod_{\tau_m \leq t_k < t} (1+b_k) e^{-\lambda(t-\tau_m)} \leq e^{-\xi(\tau_1-t_0)} e^{-\xi(\tau_2-\tau_1)} \times \dots \times e^{-\xi(t-\tau_m)} = e^{-\xi(t-t_0)}.
 \end{aligned}$$

Тому

$$\|x\| \leq \left(\frac{c_2}{c_1} \right)^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_0 e^{-\frac{\xi}{p}(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Нехай $\varphi \in PCB_\delta(t_0)$, $\delta = \varepsilon \cdot \left(\frac{c_1}{c_2} \right)^{\frac{1}{p}}$, тоді

$$\|x\| \leq \varepsilon \cdot e^{-\frac{\xi}{p}(t-t_0)}, \quad t \geq t_0.$$

Теорему доведено.

Теорема 2. Припустимо, що існують такі сталі $\lambda > \xi \geq 0$ та для всіх $t > t_0$ виконуються умови:

$$\frac{a(t) - \lambda}{c(t)} \prod_{g(t) \leq t_k < t} (1+b_k) e^{-\lambda(t-g(t))} \geq 1, \quad (11)$$

$$\prod_{g(t) \leq t_k < t} (1+b_k) e^{-\lambda(t-g(t))} < e^{-\xi(t-g(t))}, \quad (12)$$

тоді тривіальний розв'язок рівняння (6) експоненціально стійкий.

Доведення. Нехай $V(t, x) = x$. Перевіримо виконання умов теореми 1. Умови (i), (ii) виконуються завдяки вибору функції $V(t, x)$.

Тоді згідно умови (iii) якщо

$$x(t) \geq \prod_{g(t) \leq t_k < t} (1+b_k) e^{-\lambda(t-g(t))} x(g(t)),$$

то беручи до уваги (11) отримаємо наступне

$$\begin{aligned}
 D^-V(t) &= c(t)x(g(t)) - a(t)x(t) = x(t) \left(-a(t) + c(t) \frac{x(g(t))}{x(t)} \right) \leq \\
 &\leq x(t) \left(-a(t) + c(t) \prod_{g(t) \leq t_k < t} (1+b_k)^{-1} e^{\lambda(t-g(t))} \right) \leq -\lambda x(t) = -\lambda V(t).
 \end{aligned}$$

Тобто маємо виконання всіх умов теореми 1.

Теорему доведено.

Умови експоненціальної стійкості розв'язків рівняння Маккі-Гласса.

Теорема 3. (Див. [9]) Будь-який розв'язок рівняння (1)–(3) додатний для всіх t .

Теорема 4. Нехай для всіх $t > t_0$ виконуються умови:

$$\frac{\delta(t) - \lambda}{p(t)} \prod_{g(t) \leq t_k < t} (1 + b_k) e^{-\lambda(t-g(t))} \geq 1, \quad (13)$$

$$\prod_{g(t) \leq t_k < t} (1 + b_k) e^{-\lambda(t-g(t))} < e^{-\xi(t-g(t))}, \quad (14)$$

де $\lambda > \xi \geq 0$.

Тоді тривіальний розв'язок рівняння (1) експоненціально стійкий.

Доведення. Оскільки розв'язок $x(t)$ додатний, тоді

$$\begin{aligned} x(t) &\leq p(t)x(g(t)) - \delta(t)x(t), \quad t \geq 0, \\ x(t_k + 0) &= (1 + b_k)x(t_k). \end{aligned}$$

Далі використовуючи лему 1 та теорему 2 доводимо дану теорему.

Теорему доведено.

Висновки. Розглянуто функціонально-диференціальне рівняння Маккі-Гласса зі змінними коефіцієнтами, несталим запізненням та імпульсним впливом у фіксовані моменти часу. На основі теорем типу Разуміхіна та теорем порівняння, отримано нові умови експоненціальної стійкості додатних розв'язків даного рівняння.

Список використаних джерел:

1. Mackey M. C. Oscillation and chaos in physiological control systems / M. C. Mackey, L. Glass // *Science*. — 1977. — Vol. 197. — P. 287–289.
2. Hale J. K. Onset of chaos in differential delay equations / J. K. Hale, N. Sternberg // *J. Comput. Phys.* — 1988. — Vol. 77, № 1. — P. 221–239.
3. Gopalsamy K. A note on global attractivity in models of hematopoiesis / K. Gopalsamy, S. I. Trofimchuk, N. R. Bantsur // *Ukr. Math. J.* — 1998. — Vol. 50, № 1. — P. 5–12.
4. A global stability criterion for a family of delayed population models / E. Liz, M. Pinto, V. Tkachenko, S. Trofimchuk // *Quart. Appl. Math.* — 2005. — Vol. 63. — P. 56–70.
5. Berezansky L. Mackey-Glass equation with variable coefficients / L. Berezansky, E. Braverman // *Computers and Mathematics with Applications*. — 2006. — Vol. 51. — P. 1–16.
6. Мисло Ю. М. Майже періодичні розв'язки рівнянь Маккі-Гласса з імпульсною дією / Ю. М. Мисло, В. І. Ткаченко // *Нелінійні коливання*. — 2011. — Вип. 14, № 4. — С. 507–515.
7. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсным воздействием / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — К.: Вища школа, 1987. — 288 с.
8. Lakshmikantham V. Theory of impulsive differential equations / V. Lakshmikantham, D. D. Bainov, P. S. Simeonov. — Singapore: World Scientific, 1989. — 273 p.

9. Неня О. І. Дослідження згасання розв'язків рівняння Макі-Гласса з імпульсною дією / О. І. Неня // Нелінійні коливання. — 2013. — Вип. 16, № 4. — С. 511–517.

The Mackey-Glass equation is considered, with variable coefficients, nonconstant delay and impulsive action at fixed times. Based on the Razumikhin type theorems the conditions of exponential stability are presented for positive solutions for this equation.

Key words: *functional-differential equation, impulsive action, exponential stability.*

Отримано: 12.02.2014

УДК 517.956

В. А. Літовченко, д-р фіз.-мат. наук, професор,
Г. М. Унгурян, магістр

Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ФУНДАМЕНТАЛЬНИЙ РОЗВ'ЯЗОК ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ОДНОГО КЛАСУ ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ ІЗ КОЕФІЦІЄНТАМИ ОБМЕЖЕНОЇ ГЛАДКОСТІ

Побудовано фундаментальний розв'язок задачі Коші та досліджено його властивості для одного класу параболічних рівнянь типу Шилова із змінними коефіцієнтами обмеженої гладкості та невід'ємним родом.

Ключові слова: *задача Коші, фундаментальний розв'язок, параболічність за Шиловим.*

Вступ. Параболічні за Г. Є. Шиловим рівняння з частинними похідними, на відміну від параболічних за І. Г. Петровським рівнянь, взагалі кажучи, не є стійкими в сенсі параболічності до зміни своїх коефіцієнтів, навіть тих, що знаходяться при нульовій похідній [1].

У [2] Я. І. Житомирський означає досить широкий клас параболічних систем типу Шилова із залежними від просторової змінної молодшими коефіцієнтами, який охоплює параболічні за Шиловим системи. Для таких систем методом послідовних наближень, без використання фундаментального розв'язку, встановлено коректну розв'язність задачі Коші в класі достатньо гладких обмежених початкових функцій. Подальше дослідження задачі Коші для систем з цього класу потребує побудови фундаментального розв'язку задачі Коші (ФРЗК) та всебічного її вивчення.

Розвиваючи класичні методи теорії параболічних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, у [3] здійснено повний аналітичний опис ФРЗК

для параболічних рівнянь типу Шилова з невід'ємним родом й обмеженими нескінченно диференційовними за просторовою змінною коефіцієнтами та досліджено його основні властивості.

У цій статті, результати, одержані в [3] поширюються на випадок параболічних рівнянь типу Шилова з невід'ємним родом, коефіцієнти яких стосовно просторової змінної мають обмежений ступінь гладкості.

1. Постановка задачі. Нехай \mathbb{N} — множина натуральних чисел, $\mathbb{N}_m := \{1, \dots, m\}$, $m \in \mathbb{N}$; T — фіксоване додатне число; \mathbb{R}^n — дійсний евклідів простір розмірності $n \geq 1$ з нормою $\|\cdot\|$; \mathbb{Z}_+^n — множина всіх n -вимірних мультиіндексів; i — уявна одиниця; $|z_*| := |z_1| + \dots + |z_n|$, якщо

$$z := (z_1, \dots, z_n) \in \mathbb{R}^n, \Pi_M := \{(t, x) \mid t \in M, x \in \mathbb{R}^n\}, M \subset \mathbb{R}^1, \\ \Pi_T^2 := \{(t, x; \tau, \xi) \mid 0 \leq \tau < t \leq T, \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n\}.$$

Розглянемо диференціальне рівняння

$$\partial_t u(t, x) = \sum_{|k| \leq p} a_k(t, x) i^{|k|} \partial_x^k u(t, x), (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (1)$$

порядку p права частина якого допускає зображення

$$\sum_{|k| \leq p} a_k(t, x) i^{|k|} \partial_x^k u(t, x) = \{P_0(t, i\partial_x) + P_1(t, x, i\partial_x)\} u(t, x),$$

де $P_0(t, i\partial_x) := \sum_{|k| \leq p} a_{0,k}(t) i^{|k|} \partial_x^k$, $P_1(t, x, i\partial_x) := \sum_{|k| \leq p_1} a_{1,k}(t) i^{|k|} \partial_x^k$, при-

чому відповідне рівняння

$$\partial_t u(t, x) = P_0(t, i\partial_x) u(t, x), (t, x) \in \Pi_{(0, T]}, \quad (2)$$

є параболічним за Шиловим з показником параболічності h , $0 < h \leq p$, зведеним порядком p_0 й невід'ємним родом μ , $0 \leq \mu \leq 1$ [4].

Для рівняння (1) припускатимемо таке виконання наступних умов:

A) $0 \leq p_1 < h - n(1 - h\mu / p_0)$;

B) коефіцієнти є неперервними стосовно змінної t , диференційовними до порядку α^* включно стосовно просторової змінної x обмеженими в шарі $\Pi_{[0, T]}$ функціями.

Позначимо ФРЗК для рівняння (2) через $G(t, \tau; \cdot)$, $t \in (\tau, T]$.

Властивості цього розв'язку детально досліджено в [5], де, зокрема, встановлено, що

$$\forall T > 0 \quad \forall \tau \in [0; T] \quad \exists \delta > 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+^n \quad \exists c > 0 \quad \forall t \in (\tau; T] \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \quad (3)$$

$$\left| \partial_x^k G(t, \tau; x) \right| \leq c(t - \tau)^{-\frac{n+|k|}{h}} e^{-\delta \left(\frac{\|x\|}{(t-\tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad \alpha := \mu / p_0, \quad \mu \geq 0.$$

Означення. ФРЗК для рівняння (1) назовемо функцію $Z(t, x; \tau, \xi)$, визначену для всіх $(t; x) \in \Pi_{(\tau; T]}$ і залежну від параметричної точки $(\tau; \xi) \in \Pi_{(0; T]}$ таку, що:

- 1) Z як функція $(t; x)$ задовольняє рівняння (1) в шарі $\Pi_{(\tau; T]}$;
- 2) виконується граничне співвідношення

$$Z(t, x; \tau, \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow \tau+0} \delta(\cdot - x)$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі розподілів Л. Шварца (тут $\delta(\cdot)$ — дельта-функція Дірака).

Задача полягає у побудові та дослідженні властивостей функції $Z(t, x; \tau, \xi)$.

2. Побудова та дослідження властивостей фундаментального розв'язку. Шукатимемо ФРЗК для рівняння (1) у вигляді

$$Z(t, x; \tau, \xi) = G(t, \tau; x - \xi) + \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} G(t, \beta; x - y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy \equiv \quad (4)$$

$$\equiv G(t, \tau; x - \xi) + W(t, x; \tau, \xi), \quad (t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2$$

де G — ФРЗК для рівняння (2), а Φ — деяка функція, вибір якої здійснюється так, щоб функція Z була розв'язком рівняння (1) стосовно змінних t і x . Для знаходження Φ класичним способом одержуємо інтегральне рівняння

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = K(t, x; \tau, \xi) + \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x; \beta, y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy, \quad (5)$$

в якому

$$K(t, x; \tau, \xi) := P_1(t, x; i\partial_x) G(t, \tau; x - \xi).$$

Розв'язуючи це рівняння методом послідовних наближень, дістанемо такий формальний розв'язок:

$$\Phi(t, x; \tau, \xi) = \sum_{l=1}^{\infty} K_l(t, x; \tau, \xi), \quad (t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2, \quad (6)$$

де $K_1 := K$, а

$$K_l(t, x; \tau, \xi) := \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t, x; \beta, y) K_{l-1}(\beta, y; \tau, \xi) dy, \quad l > 1.$$

Для встановлення збіжності ряду (6) та обґрунтування коректності здійснених раніше перетворень, дослідимо властивості повторних ядер K_l .

Враховувавши обмеженість коефіцієнтів рівняння (1) та умову А) і розмірковуючи так, як при оцінюванні відповідних повторних ядер K_l у [3], одержимо існування такого номера l_* та додатніх сталих c_* , δ_* і E , що для всіх $(t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2$ виконуються оцінки:

$$|K_l(t, x; \tau, \xi)| \leq c_* (t - \tau)^{l\alpha_0 - (1 + \alpha n)} e^{-\delta_* \left(\frac{\|x - \xi\|}{(t - \tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha}}}, \quad l \in \mathbb{N}_{l_* - 1}; \quad (7)$$

$$|K_{l_* + l}(t, x; \tau, \xi)| \leq c_* \left(E (t - \tau)^{\alpha_0} \right)^l e^{-\delta_* \left(\frac{\|x - \xi\|}{(t - \tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha}}} \prod_{j=0}^{l-1} B(\alpha_0; 1 + j\alpha_0), \quad (8)$$

$$\alpha_0 := 1 + \alpha n - \frac{n + p_1}{n}, \quad l \geq 0,$$

а $B(\cdot; \cdot)$ — бета-функція Ейлера.

Властивості бета-функцій та оцінки (7) і (8) обґрунтовують правильність наступного твердження.

Лема 1. Функціональний ряд (6) є абсолютно та рівномірно збіжним рядом на множині Π_T^2 для суми якого справджується нерівність

$$|\Phi(t, x; \tau, \xi)| \leq c_0 (1 - \tau)^{\alpha_0 - (1 + \alpha n)} e^{-\delta_* \left(\frac{\|x - \xi\|}{(1 - \tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha}}},$$

(тут константа c_0 залежить лише від T).

Наслідок 1. Функція Φ , яка визначається рівністю (6), є звичайним розв'язком інтегрального рівняння (5).

Твердження цього наслідку випливає із структури рівняння (5) та зображення (6) функції Φ , якщо врахувати рівність

$$\begin{aligned} & \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K(t, x; \beta, y) \left(\sum_{l=1}^{\infty} K_l(\beta, y; \tau, \xi) \right) dy = \\ & = \sum_{l=1}^{\infty} \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} K_1(t, x; \beta, y) K_l(\beta, y; \tau, \xi) dy. \end{aligned}$$

Правильність цієї рівності впливає з одержаних оцінок повторних ядер, леми 1 та відповідної теореми про почленне інтегрування функціональних рядів.

Твердження леми 1 разом із оцінкою (3) забезпечують для всіх $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$ і $0 \leq \tau < t \leq T$ абсолютну збіжність інтеграла, яким визначається потенціал W з рівності (4). Таким чином, функція $Z(t, x; \tau, \xi)$ коректно визначена формулою (4) на всій множині Π_T^2 .

Щоб дослідити властивості гладкості функції Z , оцінимо похідні повторних ядер K_l .

Оскільки,

$$K_1(t, x; \tau, \xi) = P_1\left(t, x; i\partial_{(x-\xi)}\right)G(t, \tau; x - \xi),$$

то врахувавши умову В) та оцінку (3), одержимо, що для всіх $\{q, r\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $|q|_* \leq \alpha_*$, виконується оцінка

$$\left| \partial_x^q \partial_\xi^r K_1(t, x; \tau, \xi) \right| \leq c_{q,r} (t - \tau)^{-\frac{n+p_1+|r+q|_*}{h}} e^{-\delta \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad (t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2,$$

при $l > 1$ оцінювання $\left| \partial_x^q \partial_\xi^r K_l(t, x; \tau, \xi) \right|$ зводиться до оцінок виразів

$$\left| \partial_\xi^r \partial_x^q K_1(t, x; \tau, \eta + \xi) \right|, \quad \left| \partial_x^q K_1(t, x; \tau, x - z) \right|, \\ \left| \partial_\xi^r \partial_x^q K_{l-1}(t, x - z; \tau, \xi) \right|, \quad \left| \partial_\xi^r K_{l-1}(t, \eta + \xi; \tau, \xi) \right|.$$

Урахувавши умову В) і оцінку (3), для всіх $\{q, r\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $|q|_* \leq \alpha_*$, $\{x, \eta, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $t \in (\tau; T]$ і $\tau \in [0; T)$ маємо:

$$\left| \partial_\xi^r \partial_x^q K_1(t, x; \tau, \eta + \xi) \right| \leq c_{r,q} (t - \tau)^{-\frac{n+p_1+|r+q|_*}{h}} e^{-\delta \left(\frac{\|x-\eta-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}; \quad (9)$$

$$\left| \partial_x^q K_1(t, x; \tau, x - \xi) \right| \leq c_q (t - \tau)^{-\frac{n+p_1}{h}} e^{-\delta \left(\frac{\|\xi\|}{(t-\tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}. \quad (10)$$

Оцінюючи вираз $\left| \partial_\xi^r K_l(t, \eta + \xi; \tau, \xi) \right|$, прийдемо до нерівностей

$$\left| \partial_\xi^r K_l(t, \eta + \xi; \tau, \xi) \right| \leq \\ \leq c_{l,r}(\varepsilon) \left(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0; j\alpha_0) \right) (t - \tau)^{(l-1)\alpha_0 - \frac{n+p_1}{h}} e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon) \left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad (11)$$

які виконуються для всіх $\{\eta, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $|r|_* \leq \alpha_*$, $t \in (\tau; T]$, $\tau \in [0; T)$, $\varepsilon \in (0; 1)$ і $l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, а відтак і до існування такого номера l_* , при якому

$$\left| \partial_{\xi}^r K_{l_*} (t, \eta + \xi; \tau, \xi) \right| \leq c_{l_*, r} (\varepsilon) \left(\prod_{j=1}^{l_*-1} B(\alpha_0; j\alpha_0) \right) e^{-\delta(1-(l_*-1)\varepsilon)} \left(\frac{\|\eta\|}{(t-\tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}},$$

(тут величини $c_{l_*, r} (\varepsilon) > 0$ не залежать від змінних t , τ , η і ξ , які змінюються вищезазначеним способом).

Оскільки

$$\begin{aligned} \partial_{\xi}^r \partial_x^q K_l (t, x; \tau, \eta + \xi) &= \partial_{\xi}^r \partial_x^q K_l (t, x; \tau, \xi) \Big|_{\xi=\eta+\xi}, \\ \partial_{\xi}^r \partial_x^q K_l (t, x-z; \tau, \xi) &= \partial_{\xi}^r \partial_y^q K_l (t, y; \tau, \xi) \Big|_{y=x-z}, \end{aligned}$$

то вирази $\partial_{\xi}^r \partial_x^q K_l (t, x; \tau, \eta + \xi)$, $\partial_{\xi}^r \partial_x^q K_l (t, x-z; \tau, \xi)$, $\partial_{\xi}^r \partial_x^q K_l (t, x; \tau, \xi)$ є однотипними. Тому враховуючи оцінки (9)–(11), матимемо:

$$\begin{aligned} \left| \partial_{\xi}^r \partial_x^q K_l (t, x; \tau, \xi) \right| &\leq c_{l, \varepsilon}^{r, q} (t-\tau)^{l\alpha_0 - \left(1 + \alpha n + \frac{|r+q|_*}{h}\right)} \times \\ &\times e^{-\delta(1-(l-1)\varepsilon)} \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0; j\alpha_0) \right), \end{aligned} \quad (12)$$

для всіх $\{r, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $|r|_* \leq \alpha_*$, $|q|_* \leq \alpha_*$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau < t \leq T$, $\varepsilon \in (0; 1)$ і $l \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Перейдемо тепер до знаходження оцінок виразу $\left| \partial_{\xi}^r \partial_x^q K_l (t, x; \tau, \xi) \right|$, придатних для встановлення диференційовності функції Φ за просторовими змінними. З попередньої нерівності приходимо до існування такого номера l^* , при якому

$$\begin{aligned} \left| \partial_{\xi}^r \partial_x^q K_{l^*} (t, x; \tau, \xi) \right| &\leq c_{l^*, \varepsilon}^{r, q} e^{-\delta(1-(l^*-1)\varepsilon)} \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \left(\prod_{j=1}^{l^*-1} B(\alpha_0; j\alpha_0) \right), \\ |r|_* &\leq \alpha_*, |q|_* \leq \alpha_*, (t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2. \end{aligned}$$

Тоді з (11) і (12), розмірковуючи як при одержанні оцінки (8), переконуємося в існуванні додатних сталих E і K таких, що для всіх $\{r, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n$, $|r|_* \leq \alpha_*$, $|q|_* \leq \alpha_*$, $l \geq l_*$, $\{x, \xi, \eta\} \subset \mathbb{R}^n$ та $0 \leq \tau < t \leq T$

$$\begin{aligned} & \left| \partial_{\xi}^r \partial_x^q K_l(t, x; \tau, \xi) \right| \leq \\ & \leq c_* e^{-\delta \left(\frac{\|x - \xi\|}{(t - \tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha}}} \left(EK \frac{|r + q|_*}{h} \right)^l (t - \tau)^{l \alpha_0 - \frac{|r + q|_*}{h}} \left(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0; 1 + j \alpha_0) \right), \end{aligned} \quad (13)$$

$$\left| \partial_{\xi}^r K_l(t, \eta + \xi; \tau, \xi) \right| \leq c_* e^{-\delta \left(\frac{\|x - \xi\|}{(t - \tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha}}} \left(E(t - \tau^{\alpha_0}) \right)^l \left(\prod_{j=1}^{l-1} B(\alpha_0; 1 + j \alpha_0) \right), \quad (14)$$

де $l_+ := \max\{l_*, l^*\}$.

Одержані оцінки (11)–(14) дозволяють встановити рівномірну збіжність стосовно просторових змінних функціональних рядів

$$\sum_{l=1}^{\infty} \partial_{\xi}^r \partial_x^q K_l(t, x; \tau, \xi), \quad \sum_{l=1}^{\infty} \partial_{\xi}^r K_l(t, x + \xi; \tau, \xi),$$

при $|r|_* \leq \alpha_*$, $|q|_* \leq \alpha_*$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$ і $0 \leq \tau < t \leq T$ та одержати оцінки їхніх сум і, у такий спосіб, обґрунтувати правильність наступного допоміжного твердження.

Лема 2. Функція $\Phi(t, x; \tau, \xi)$ на множині Π_T^2 за кожною із просторових змінних x і ξ має частинні похідні до порядку α_* включно, причому правильними є такі оцінки:

$$\left| \partial_{\xi}^r \partial_x^q \Phi(t, x; \tau, \xi) \right| \leq c_1 (t - \tau)^{\alpha_0 - \left(1 - \alpha n + \frac{|r + q|_*}{h}\right)} e^{-\delta \left(\frac{\|x - \xi\|}{(t - \tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha}}}, \quad (15)$$

$$\left| \partial_{\xi}^r \Phi(t, x + \xi; \tau, \xi) \right| \leq c_2 (t - \tau)^{\alpha_0 - (1 - \alpha n)} e^{-\delta \left(\frac{\|x - \xi\|}{(t - \tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha}}}, \quad (16)$$

(тут $|r|_* \leq \alpha_*$, $|q|_* \leq \alpha_*$, $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, $0 \leq \tau < t \leq T$, а оціночні сталі c_1 , c_2 і δ_* не залежать від t , τ , x і ξ).

Теорема 1. Функція $Z(t, x; \tau, \xi)$ на множині Π_T^2 за кожною із змінних x і ξ є диференційовною до порядку α_* включно, причому $\forall \delta > 0 \quad \forall \{r, q\} \subset \mathbb{Z}_+^n \quad |r|_* \leq \alpha_*$, $|q|_* \leq \alpha_*$, $\exists c > 0 \quad \forall (t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2$:

$$\left| \partial_{\xi}^r \partial_x^q Z(t, x; \tau, \xi) \right| \leq c (t - \tau)^{-\frac{n + |r + q|_*}{h}} e^{-\delta \left(\frac{\|x - \xi\|}{(t - \tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1 - \alpha}}}. \quad (17)$$

Доведення. Питання про диференційовність функції Z за просторовими змінними зводиться до питання про можливість диференціювати за цими змінними під знаком інтеграла в об'ємному потенціалі W . Тому досить встановити рівномірну стосовно змінних x і ξ , $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$, збіжність інтеграла

$$I_*(t, x; \tau, \xi) := \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_{\xi}^r \partial_x^q (G(t, \beta; x - y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi)) dy,$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad |r|_* \leq \alpha_*, \quad |q|_* \leq \alpha_*.$$

Урахувавши оцінки (5), (15) і (16), дістанемо

$$|I_*(t, x; \tau, \xi)| \leq c_3 (t - \tau)^{\alpha_0 - \frac{n + |r + q|_*}{h}} e^{-\frac{\delta (\|x - \xi\|)^{\frac{1}{1 - \alpha}}}{2 (t - \tau)^{\alpha}}}, \quad (t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2, \quad (18)$$

де $|r|_* \leq \alpha_*$, $|q|_* \leq \alpha_*$, константа $c_3 > 0$ не залежить від t , τ , x і ξ .

Звідси одержуємо рівномірну стосовно змінних x і ξ збіжність інтеграла I_* , а відтак, і диференційовність за цими змінними функції $Z(t, x; \tau, \xi)$ до зазначеного порядку α_* на площині Π_T^2 .

Оцінка (17) безпосередньо впливає з нерівностей (3) і (18).

Теорему доведено.

Наслідок 2. Якщо $\alpha_* \geq p$, то для всіх t і τ , $0 \leq \tau < t \leq T$, а також $\{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n$ виконується рівність

$$\{P_0(t, i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\} W(t, x; \tau, \xi) = \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \{P_0(t, i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\} \times$$

$$\times G(t, \beta; x - y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy.$$

Перейдемо до дослідження властивостей гладкості функції $Z(t, x; \tau, \xi)$ стосовно змінних t і τ .

Лема 3. Об'ємний потенціал W є диференційованою функцією за змінною t на $(\tau; T]$ такою, що для $(t, x; \tau, \xi) \in \Pi_T^2$

$$\partial_t W(t, x; \tau, \xi) = \Phi(t, x; \tau, \xi) + \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t G(t, \beta; x - y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy.$$

Доведення. Згідно з означенням похідної

$$\partial_t W(t, x; \tau, \xi) = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta} \left\{ \int_{\tau}^{t+\Delta} \widetilde{V}_{\beta}(t + \Delta, x; \tau, \xi) d\beta - \int_{\tau}^t \widetilde{V}_{\beta}(t, x; \tau, \xi) d\beta \right\},$$

де

$$\widetilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi) := \int_{\mathbb{R}^n} G(t, \beta; x - y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy,$$

тому доведення диференційовності $W(t, x; \tau, \xi)$ за змінною t зводиться до встановлення існування границі з правої частини цієї рівності. Ця границя існуватиме, якщо існуватимуть рівні між собою відповідні односторонні границі

$$I_\pm := \lim_{\Delta \rightarrow +0} \frac{1}{\pm\Delta} \left\{ \int_\tau^{t \pm \Delta} \widetilde{V}_\beta(t \pm \Delta, x; \tau, \xi) d\beta - \int_\tau^t \widetilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi) d\beta \right\}.$$

Безпосередньо з оцінки

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} |\partial_t G(t, \beta; x - y) \Phi(\beta, y; \tau, \xi)| dy \leq \\ & \leq c(t - \tau)^{-\alpha n} (t - \beta)^{\alpha n - \frac{n+p}{h}} (\beta - \tau)^{\alpha_0 - 1} e^{-\delta_0 \left(\frac{\|x - \xi\|}{(t - \tau)^\alpha} \right)^{1-\alpha}}, \quad (19) \\ & 0 \leq \tau < \beta < t \leq T, \{x, y\} \subset \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

яка одержується з нерівності (3), твердження леми 1 й того, що функція G є розв'язком рівняння (2), дістаємо диференційовність функції $\widetilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi)$ за змінною t у кожній точці проміжку $(\beta; T]$, $\beta > \tau$, та виконання такої рівності:

$$\partial_t \widetilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi) = \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t G(t, \beta; x - y)) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy, \quad (20)$$

при $0 \leq \tau < \beta < t \leq T$, $\{x, y\} \subset \mathbb{R}^n$.

Далі, скориставшись тим, що

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pm\Delta} \int_\tau^{t \pm \Delta} \widetilde{V}_\beta(t \pm \Delta, x; \tau, \xi) d\beta = \widetilde{V}_{t \pm \theta\Delta}(t \pm \Delta, x; \tau, \xi) \xrightarrow{\pm\Delta \rightarrow 0} \Phi(t, x; \tau, \xi), \\ & \frac{1}{\pm\Delta} \int_\tau^t (\widetilde{V}_\beta(t \pm \Delta, x; \tau, \xi) - \widetilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi)) d\beta = \int_\tau^t \partial_t \widetilde{V}_\beta(t \pm \theta\Delta, x; \tau, \xi) d\beta, \quad \theta \in (0; 1), \end{aligned}$$

а також, очевидним зображенням

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\pm\Delta} \left\{ \int_\tau^{t \pm \Delta} \widetilde{V}_\beta(t \pm \Delta, x; \tau, \xi) d\beta - \int_\tau^t \widetilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi) d\beta \right\} = \frac{1}{\pm\Delta} \times \\ & \times \left\{ \int_t^{t \pm \Delta} \widetilde{V}_\beta(t \pm \Delta, x; \tau, \xi) d\beta + \int_\tau^t (\widetilde{V}_\beta(t \pm \Delta, x; \tau, \xi) - \widetilde{V}_\beta(t, x; \tau, \xi)) d\beta \right\}, \end{aligned}$$

одержуємо, що

$$I_{\pm} = \Phi(t, x; \tau, \xi) + \lim_{\Delta \rightarrow +0} \int_{\tau}^t \partial_t \widetilde{V}_{\beta}(t \pm \theta \Delta, x, \tau, \xi) d\beta, \quad \theta \in (0; 1).$$

Урахувавши тепер рівність (20), приходимо до висновку, що для доведення вихідної леми досить обґрунтувати правильність рівності

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} \int_{\tau}^t \partial_t \widetilde{V}_{\beta}(t + \Delta, x; \tau, \xi) d\beta = \int_{\tau}^t \left(\lim_{\Delta \rightarrow 0} \partial_t \widetilde{V}_{\beta}(t + \Delta, x; \tau, \xi) \right) d\beta. \quad (21)$$

Оцінимо підінтегральний вираз із лівої частини цієї рівності. Скориставшись ще раз рівністю (20), а також тим, що G — розв’язок рівняння (2), оцінками (19), (3) і (15), виділяючи скрізь залежність від Δ , одержимо

$$\left| \int_{\tau}^t \partial_t \widetilde{V}_{\beta}(t + \Delta, x; \tau, \xi) d\beta \right| \leq c(t - \tau)^{2\alpha_0 - \left(1 + an + \frac{p}{h}\right)},$$

$$0 \leq \tau < t \leq T, \quad 0 < |\Delta| < (t - \tau) / 2, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n,$$

де додатна стала c не залежить від Δ . Ця оцінка характеризує рівномірну збіжність інтеграла з лівої частини рівності (21) та забезпечує виконання цієї рівності.

Лема доведена.

Теорема 2. Для функції Z виконується граничне співвідношення

$$Z(t, x; \tau, \cdot) \xrightarrow{t \rightarrow \tau + 0} \delta(\cdot - x)$$

у розумінні слабкої збіжності в просторі S' .

Доведення. Зваживши на те, що функція G є ФРЗК для рівняння (2), приходимо до висновку, що доведення потребує лише граничне співвідношення

$$\langle W(t, x; \tau, \cdot), \varphi(\cdot) \rangle \xrightarrow{t \rightarrow \tau + 0} 0, \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \varphi \in S. \quad (22)$$

Безпосередньо із структури потенціала W переконаємося, що співвідношення (22) виконується, якщо існуватиме така додатна стала c_0 , що для всіх $\beta \in [\tau; t]$, $0 \leq \tau < t \leq T$ і $y \in \mathbb{R}^n$

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\Phi(\beta, y; \tau, \xi)} \varphi(\xi) d\xi \right| \leq c_0, \quad (23)$$

(тут риска зверху, означає комплексну спряженість).

Таким чином, доведення теореми 2 звелось до встановлення оцінки (23).

Використовуючи структуру (6) функції Φ та нерівність

$$|J_I(\beta, \tau, y)| := \left| \int_{\mathbb{R}^n} \overline{K_I(\beta, y; \tau, \xi)} \varphi(\xi) d\xi \right| \leq c_I, \quad \varphi \in S,$$

$$\beta \in [\tau, t], \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

яка встановлюється шляхом поєднання одержаних раніше оцінок повторних ядер K_l із властивостями елементів простору S швидко спадних гладких на \mathbb{R}^n функції, зважаючи при цьому на існування такого номера l_* , що

$$\left| \sum_{l=l_*+1}^{\infty} K_l(t, x; \tau, \xi) \right| \leq c_* e^{-\delta_0 \left(\frac{\|x-\xi\|}{(t-\tau)^\alpha} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}}}, \quad \{x, \xi\} \subset \mathbb{R}^n, \quad 0 \leq \tau < t \leq T,$$

(див. обґрунтування правильності твердження леми 1), знаходимо, що для всіх $\varphi \in S$

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\mathbb{R}^n} \overline{\Phi(\beta, y; \tau, \xi)} \varphi(\xi) d\xi \right| \leq \\ & \leq \sum_{l=1}^{l_*} |J_l(\beta, \tau, y)| + \int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{l=l_*+1}^{\infty} K_l(\beta, y; \tau, \xi) \right| |\varphi(\xi)| d\xi \leq \\ & \leq \sum_{l=1}^{l_*} c_l + c_* \int_{\mathbb{R}^n} |\varphi(\xi)| d\xi \equiv c_0 < +\infty, \quad \beta \in [\tau, t], \quad 0 \leq \tau < t \leq T, \quad y \in \mathbb{R}^n, \end{aligned}$$

де константа c_0 не залежить від β , τ , t і y .

Отже, оцінка (23) виконується.

Теорему доведено.

Теорема 3. Нехай виконуються умови А) і В), тоді при $\alpha_* \geq p$ функція Z , що визначається рівністю (4), є ФРЗК для рівняння (1).

Доведення. Зважаючи на рівності (5) та

$$\partial_t G(t, \tau; x) = P_0(t, i\partial_x) G(t, \tau; x),$$

лему 3 і наслідок 2, для всіх $(t, x) \in \Pi_{(\tau, T)}$, $\tau \in [0, T)$, $\xi \in \mathbb{R}^n$, одержуємо

$$\begin{aligned} & \partial_t Z(t, x; \tau, \xi) = \\ & = \partial_t G(t, \tau; x - \xi) + \partial_t W(t, x; \tau, \xi) = P_0(t, i\partial_x) G(t, \tau; x - \xi) + \\ & + \Phi(t, x; \tau, \xi) + \int_{\tau}^t d\beta \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_t G(t, \beta; x - y)) \Phi(\beta, y; \tau, \xi) dy = \\ & = \{P_0(t, i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\} G(t, \tau; x - \xi) + \\ & + \{P_0(t, i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\} W(t, x; \tau, \xi) = \\ & = \{P_0(t, i\partial_x) + P_1(t, x; i\partial_x)\} Z(t, x; \tau, \xi). \end{aligned}$$

Таким чином, функція $Z(t, x; \tau, \xi)$, як функція змінних (t, x) на $\Pi_{(\tau, T]}$ є звичайним розв'язком рівняння (1) у кожній фіксованій точці $(\tau, \xi) \in \Pi_{[0, T)}$.

Якщо врахувати при цьому твердження теореми 2, то прийдемо до висновку, що для функції Z виконуються всі умови з означення ФРЗК для рівняння (1).

Теорему доведено.

Висновок. Для параболічних типу Шилова рівнянь (1) зі змінними молодшими коефіцієнтами існує ФРЗК за умови, що гладкість цих коефіцієнтів є не нижчою ніж порядок p рівняння (1).

Однак, слід зазначити, що розглянутий тут клас рівнянь (1) охоплює параболічні за Петровським рівняння з сталими або залежними лише від часу коефіцієнтами групи старших членів. А, як відомо, (див., наприклад, [7]) ФРЗК для таких рівнянь існує за мінімальніших умов на гладкість молодших коефіцієнтів.

Список використаних джерел:

1. Хоу-синь У. Об определении параболичности систем уравнений в частных производных / У. Хоу-синь // Успехи мат. наук. — 1960. — Т. 15, № 6. — С. 157–161.
2. Житомирский Я. И. Задача Коши для некоторых типов параболических по Г. Е. Шилову систем линейных уравнений в частных производных с непрерывными коэффициентами / Я. И. Житомирский // Изв. АН СССР. Сер. матем. — 1959. — Т. 23. — С. 925–932.
3. Довжицька І. М. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу параболічних рівнянь із змінними коефіцієнтами / І. М. Довжицька, В. А. Литовченко // Наук. вісник Чернівецького ун-ту : зб. наук. праць. — Чернівці : Рута, 2010. — Вип. 528. Математика. — С. 43–50.
4. Гельфанд И. М. Некоторые вопросы теории дифференциальных уравнений / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев. — М. : Физматгиз, 1958. — 274 с.
5. Литовченко В. А. Задача Коши для параболических по Шилову уравнений / В. А. Литовченко // Сиб. мат. журн. — 2004. — Т. 45, № 4. — С. 809–821.
6. Гельфанд И. М. Пространства основных и обобщенных функций / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилев. — М. : Физматгиз, 1958. — 307 с.
7. Фридман А. Уравнения с частными производными параболического типа / А. Фридман. — М. : Мир, 1968. — 427 с.

We built the fundamental solution of the Cauchy problem and investigated its properties for a class of Shilov parabolic equations with variable coefficients bounded smooth and integral form.

Key words: *the Cauchy problem, the fundamental solution, parabolic after Shilov.*

Отримано: 12.03.2014

УДК 519.718:519.217:519.837:517.929

В. І. Мусурівський, канд. фіз.-мат. наукЧернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

ПРО ПРОБЛЕМУ СТІЙКОСТІ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕЦІАЛЬНО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ІМПУЛЬСНИМИ МАРКОВСЬКИМИ ЗБУРЕННЯМИ ТА СКІНЧЕННИМ ЗАПІЗНЕННЯМ

Розглянуто проблему стійкості стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з імпульсними марковськими збуреннями та скінченним запізненням при наявності випадкового процесу і запізнення одночасно.

Ключові слова: диференціально-функціональні рівняння, системи випадкової структури, імпульсні марковські збурення, скінченне запізнення.

Вступ. Проблеми стійкості і стабілізації математичних моделей імпульсних динамічних систем випадкової структури із скінченною післядією при наявності зовнішніх та внутрішніх марковських параметрів розглянуті в роботах [1–4].

У цій статті розглянута проблема побудови системи, яка описується стохастичними диференціально-функціональними рівняннями з імпульсними марковськими збуреннями (зовнішніми і внутрішніми), будучи системою випадкової структури із скінченним запізненням (СВСЗ), при наявності перехідного процесу і запізнення одночасно. СВСЗ повинна володіти властивістю асимптотичної стійкості за ймовірністю і забезпечувати наперед задану оптимальність перехідного процесу. Побудова подібної динамічної системи вирішується за рахунок вибору керування, що працює за законом зворотного зв'язку.

1. Постановка задачі про оптимальну стабілізацію. Нехай заданий імовірнісний базис $(\Omega, F, \{F_t, t \geq 0\}, P)$ [6], [7]. Маємо: феллерівський марковський процес $\{\xi(t), t \geq 0\}$ зі значеннями в метричному просторі Y із перехідною ймовірністю $P(s, y, t, \Gamma)$; феллерівський ланцюг Маркова $\{\eta_k, k \geq 0\}$ зі значеннями в метричному просторі H з перехідною ймовірністю на k -ому кроці $P_k(h, G)$ [8].

Нехай випадковий процес $x(t) \in R^m$ динамічної системи зі скінченним запізненням описується диференціально-функціональним рівнянням (ДФР) [5], [9–10], [3–4],

$$dx(t) = a(t, \xi(t), x(t), x_t, u)dt + b(t, \xi(t), x(t), x_t, u)dw(t) \quad (1)$$

з імпульсними зовнішніми марковськими збуреннями

$$\Delta x(t) \Big|_{t=t_k} = g(t_k^-, \xi(t_k^-), x_{t_k^-}, \eta_k), \quad (2)$$

де $t_k \in S \equiv \{t_n \uparrow, n \in N\}$, причому $\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = +\infty$, і з початковою умовою

$$x_{t_0} = z_0 \in D, \quad \xi(t_0) = y \in Y, \quad \eta_{k_0} = h \in H. \quad (3)$$

Асимптотика розв'язку $x \equiv x(t) \in R^m$ СВСЗ розглядається відносно нульового розв'язку $x(t) \equiv 0; \quad \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad x_t \equiv \{x(t+\theta)\}, \quad -\tau \leq \theta \leq 0, \quad \tau > 0, \quad D \equiv D([- \tau, 0], R^m)$ — простір Скорохода неперервних справа функцій, що мають лівосторонні границі [2]. $w(t)$ — вінерівський процес. Величина $u \equiv u(t, y, x_t, h) \in R^r$ — r -мірне керування [3].

Випадкова внутрішня зміна структури динамічної системи може викликатися:

- скалярним чисто розривним марковським процесом $\xi(t) \in R^1$, що допускає розклад:

$$P\{\xi(t + \Delta t) \in (\beta, \beta + \Delta\beta) \mid \xi(t) = \alpha \neq \beta\} = p(t, \alpha, \beta)\Delta\beta\Delta t + o(\Delta t), \quad (4)$$

$$P\{\xi(\tau) = \alpha, t < \tau = t + \Delta t \mid \xi(t) = \alpha\} = 1 - p(t, \alpha)\Delta t + o(\Delta t), \quad (5)$$

де $\alpha, \beta \in Y = [\eta_1, \eta_2]$, $o(\Delta t)$ — нескінченно мала величина відносно Δt , а $p(t, \alpha, \beta)$ і $p(t, \alpha)$ — задані функції [8];

- простим марковським (неперервним) ланцюгом $\xi(t)$ із скінченним числом станів $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_k\}$ і відомих параметрів $\{q_{ij}\}: q_i = \sum_{j \neq i} q_{ij}$, при цьому

$$P\{\xi(t + \Delta t) = y_j \mid \xi(t) = y_i \neq y_j\} = q_{ij}(t)\Delta t + o(\Delta t), \quad i, j = \overline{1, k}. \quad (6)$$

Оскільки для системи (1)–(3) досліджується тривіальний розв'язок $x(t) \equiv 0$, то права частина цієї системи задовольняє умовам

$$\begin{aligned} |a(t, y, 0, z, u)| \equiv 0, \quad |b(t, y, 0, z, u)| \equiv 0, \quad |g(t, y, 0, h)| \equiv 0, \\ \forall t \geq t_0 \geq 0, \quad \forall y \in Y, \quad \forall h \in H. \end{aligned} \quad (7)$$

Припустимо, що вимірні за сукупністю змінних функціонали

$$a: R_+ \times Y \times R^m \times D \times R^r \rightarrow R^m, \quad b: R_+ \times Y \times R^m \times D \times R^r \rightarrow R^m,$$

$$g: R_+ \times Y \times R^m \times H \rightarrow R^m,$$

задовольняють умову Ліпшица для $\forall x^1, x^2 \in R^m, \forall z^1, z^2 \in D$ рівномірно за всіма іншими аргументами для $\forall t \geq t_0 \geq 0, \forall y \in Y, \forall h \in H, \forall u \in R^r$:

$$\begin{aligned} & \left| a(t, y, x^1, z^1, u) - a(t, y, x^2, z^2, u) \right| + \left| b(t, y, x^1, z^1, u) - b(t, y, x^1, z^2, u) \right| + \\ & \left| g(t, y, x^1, h) - g(t, y, x^2, h) \right| \leq \Lambda \left(\left| x^1 - x^2 \right| + \left| z^1 - z^2 \right| \right), \end{aligned} \quad (8_1)$$

і умову рівномірної обмеженості

$$\sup_{\substack{t \geq 0, y \in Y, \\ h \in H}} \left(\left| a(t, y, x, x_t, u) \right| + \left| b(t, y, x, x_t, u) \right| + \left| g(t, y, x, h) \right| \right) = \gamma < +\infty, \quad \gamma > 0. \quad (8_2)$$

Передбачається виконання умови про неперервність $u(t, y, z, h)$ за t, z для кожного фіксованого $\xi(t) = y \in Y$ і $\eta_k = h \in H$ в області $t \geq 0, z \in D, y \in Y, h \in H$. (9)

Означення 1. Випадковий процес $x \equiv x(t, \omega) \in R^m$ назовемо сильним розв'язком задачі Коші (1), (3) з імпульсними збуреннями (2), якщо:

- 1) $x(t) \in R^m$ погоджений з потоком σ -алгебр $\{F_t, t \geq t_0 \geq 0\}, F_t \subset F$;
- 2) для всіх $s \in [t_k, t_{k+1}), t \in (s, t_{k+1}), t_k \geq t_0$ задовольняє інтегральному рівнянню

$$\begin{aligned} x(t) = x(s) + \int_s^t \left[a(\tau, \xi(\tau), x(\tau), x_\tau, u(\tau)) \right] d\tau + \\ + \int_s^t b(\tau, \xi(\tau), x(\tau), x_\tau, u(\tau)) dw(\tau); \end{aligned} \quad (10)$$

3) при цьому

$$x(t_k) = x(t_k^-) + g\left(t_k^-, \xi(t_k^-), x_{t_k^-}, \eta_k\right), \quad \forall t_k \geq t_0 \geq 0. \quad (11)$$

Вищевизначені умови на відображення a і g гарантують існування сильного розв'язку задачі (1)–(3) згідно означення 1 із точністю до стохастичної еквівалентності при $\forall t_0 \geq 0, x \in R^m, u \in R^r$ і заданих реалізаціях марковських ланцюгів $\{\xi(t), t \geq t_0\} \subset Y$ і $\{\eta_k, k \geq k_0\} \subset H$ [1], [10]. Оскільки $x(t) \in R^m$ однозначно визначається за допомогою початкових даних (3), тому його зручно позначати $x(t, t_0, y, z, h)$.

Отже, ДФР (1), марковський процес $\{\xi(t), \eta_k\}$, і початкові умови (3) визначають при будь-якому керуванні [8] $u \equiv u(t, \xi(t), x_t, \eta_k)$

$(n+2)$ -мірний марковський процес $(x_t, \xi(t), \eta_k)$ на прямому добутку просторів $D \otimes Y \otimes H$. При цьому $x(t) \in R^m$ характеризує стан системи в момент часу t , а $\xi(t)$ і η_k структуру, у якій перебуває система в цей же момент часу $t \in S$. Будемо припускати, що майже всі реалізації марковських процесів $\xi(t)$ і η_k , $k \geq k_0$, є постійними, а перемикання відбуваються у випадкові моменти часу $t^* = t^*(\omega)$. Далі припустимо, що на кожному випадковому інтервалі часу $t^* - h \leq t < t^*$ рух відбувається внаслідок (1) при фіксованому значенні параметра $\xi(t) \equiv y_s$, $s = t^* - h$. При цьому в момент t^* перемикання системи (1) для нового стану системи (структури) варто задати початкові умови. Як правило, початкові умови вибираються з вимог неперервного продовження траєкторії $x(t) \in R^m$, як розв'язку ДФР (1)–(3).

Для врахування розглянутих ситуацій будемо вважати, що для випадкового моменту часу t^* перемикання системи (1) (за рахунок переходу $\xi(t)$ зі стану $\xi(t^* - 0) = y_i$) у стан $\xi(t^*) = y_j$, $i \neq j$) заданий умовний закон розподілу початкового стану $x(t^*)$ для структури, що змінилася, системи [5]:

$$P\{x(t^*) \in (z, z + dz) \mid x(t^* - 0) = x\} = p_{ij}(t^*, z \mid x) dz + o(dz). \quad (12)$$

Природно припустити, що майже всі реалізації процесу $\{x(t), \xi(t)\}$ неперервні справа.

2. Основні позначення і означення стійкості. Позначимо $P_k((y, h), \Gamma \times G)$ перехідну ймовірність ланцюга Маркова $\{\xi(t_k), \eta_k\}$ на k -ому кроці. Відповідно до прийнятих в теорії марковських процесів позначень імовірнісних подій [8], пов'язаних із цим ланцюгом, позначимо індексами ці ймовірності так, щоб виконувалися рівності

$$P_{y,h}^{t_k}(\xi(t_k) \in \Gamma, \eta_k \in G) = P_k((y, h), \Gamma \times G), \quad (13)$$

при всіх $t_k \geq t_0$, $y \in Y$, $h \in H$ і борелевських $\Gamma \subset Y$, $G \subset H$.

Тепер уведемо функцію

$$\begin{aligned} &P_k((y, h, x), \Gamma \times G \times C) \equiv \\ &\equiv P_{y,h}^{t_k}(x(t_{k+1}), t_k, y, x, h) \in C; x(t_{k+1}) \in \Gamma; \eta_{k+1} \in G), \end{aligned} \quad (14)$$

для $\forall t_k \in S \cup \{t_0\}$, $k \in N \cup \{0\}$, $x(t) \in R^m$, $y \in Y$, $h \in H$, і $C \subset R^m$, $\Gamma \subset Y$, $G \subset H$.

Означення 2. Дискретний оператор Ляпунова $Lv_k(y, x, h)$ на послідовності вимірних скалярних функцій $v_k(y, x, h): Y \times D \times H \rightarrow R^1$,

$k \in N \cup \{0\}$ для ДФУ (1) з імпульсними збуреннями (2) визначається співвідношенням

$$Lv_k(y, x, h) \equiv \int_{Y \times D \times H} P_k(y, x, h)(dz_1 \times dz \times dl)v_{k+1}(z_1, z, l) - v_k(y, x, h). \quad (15)$$

Означення 3. Якщо $t_k = k\beta$ при $\forall k \in N$ і деякому $\beta > 0$, відображення a, b і g не залежать від t , марковський процес $\xi(t)$ і ланцюг ξ_k однорідні, то систему (1)–(2) назвемо автономною.

У випадку автономної системи (1), (2) індекс k функції $P_k((y, h, x), \Gamma \times G \times C)$ можна опустити і дискретний оператор Ляпунова варто визначити рівністю

$$Lv(y, x, h) \equiv \int_{Y \times D \times H} P((y, x, h) dz_1 \times dz \times dl)v(z_1, z, l) - v(y, x, h). \quad (16)$$

При розвитку другого методу Ляпунова для ДФУ (1) з імпульсним впливом (2) використовуються спеціальні послідовності вищезгаданих функцій $v_k(y, x, h)$, $k \in N$.

Означення 4. Функціоналом Ляпунова-Красовського системи випадкової структури (1)–(2) назвемо послідовність невід'ємних функціоналів $\{v_k(y, x, h), k \geq 0\}$, якщо:

1) при всіх $k \geq 0$, $y \in Y$, $h \in H$, $x \in D$ визначений вираз (16);

$$2) \quad \bar{v}(r) \equiv \inf_{\substack{k \in N, y \in Y \\ h \in H, |x| \geq r}} v_k(y, x, h) \rightarrow \infty; \text{ при } r \rightarrow \infty \quad (17)$$

$$3) \quad \underline{v}(r) \equiv \sup_{\substack{k \in N, y \in Y \\ h \in H, |x| \leq r}} v_k(y, x, h) \rightarrow 0; \text{ при } r \rightarrow 0 \quad (18)$$

причому $\bar{v}(r)$ і $\underline{v}(r)$ неперервні і монотонні.

Означення 5. Розв'язок $x(t)$ системи випадкової структури (1)–(3) назвемо при $\forall y \in Y$, $h \in H$, $u \in R^r$ і $t_0 \geq 0$:

- стійким за ймовірністю, якщо для $\forall \varepsilon_1 > 0, \varepsilon_2 > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що з $|z_0| < \delta$ випливає нерівність

$$P\{\sup_{t \geq t_0} |x_t(t_0, y, z, h, u)| > \varepsilon_1\} < \varepsilon_2; \quad (19)$$

- асимптотично стійким за ймовірністю, якщо виконано (19), і можна вказати такі $\delta_1 > 0$ і $\delta_2 > 0$, що для майже всіх реалізацій, що задовольняють нерівності $\sup_{t \geq t_0} P|x_t(t_0, y, z, h, u)| < \delta_1$ і $|z_0| < \delta_2$, має

місце співвідношення

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P |x_t(t_0, y, z, h, u)| = 0; \quad (20)$$

- асимптотично стохастично стійким, якщо він стійкий за ймовірністю, і для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_1 > 0$ такий, що при всіх $|z_0| < \delta_1$,

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} P \left\{ \sup_{t \geq \tau} |x_t(t_0, y, z, h, u)| > \varepsilon \right\} = 0. \quad (21)$$

Означення 6. Розв'язок $x(t)$ системи випадкової структури (1)–(3) назвемо при $\forall y \in Y; h \in H, u \in R^r, t_0 \geq 0, t \geq t_0; z \in D$:

- p -стійким (при $p > 0$), якщо для $\forall \varepsilon > 0$ можна вказати таке $\delta > 0$, що з нерівності $|z_0| < \delta$ випливає нерівність

$$E |x_t(t_0, y, z, h, u)|^p < \varepsilon; \quad (22)$$

- асимптотично p -стійким (при $p > 0$), якщо вона p -стійка і існує таке $\delta_1 > 0$, що з нерівності $|z_0| < \delta_1$ випливає

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{y \in Y, h \in H} E |x_t(t_0, y, z, h, u)|^p = 0. \quad (23)$$

Зауваження 1. При $p = 2$ будемо мати стійкість у середньому квадратичному (l.i.m.) (22) і асимптотичну стійкість в l.i.m. (23).

Означення 7. Розв'язок $x(t)$ системи випадкової структури (1)–(3) називається експоненціально p -стійким при $\forall p > 0$, якщо існує таке $\delta > 0$, що з $|z_0| < \delta$ випливає нерівність

$$E |x_t(t_0, y, z, h, u)|^p \leq M e^{-\gamma(t-t_0)} |z|^p, \quad (24)$$

при $M > 0, \gamma > 0; y \in Y; h \in H, u \in R^r, t_0 \geq 0, t \geq t_0$.

Зауваження 2. При $p = 2$ будемо мати експоненціальну стійкість в l.i.m.

3. Загальні теореми про стійкість систем випадкової структури. Для подальших викладень наведемо спочатку оцінку розв'язку задачі (1)–(2) на інтервалах (t_k, t_{k+1}) через значення розв'язку в точках $t_k, k \geq 0$ [3].

Лема 1. Нехай для $t \in [0, T], y \in Y; h \in H, u \in R^r$ виконані умови нерівності Ліпшица (8₁), нерівностей рівномірної обмеженості (8₂) і

$$|a(t, y, x, z, u)| + |b(t, y, x, z, u)| + |g(t, y, x, h)| \leq \Lambda(|x| + |z|). \quad (25)$$

Тоді для розв'язку задачі Коші (1)–(3) при всіх $k \geq 0$ має місце нерівність

$$\sup_{t_k \leq t \leq t_{k+1}} |x_t| \leq (1 + \Lambda) e^{\Lambda(t_{k+1} - t_k)} \left(|x_{t_k}| \right) + \gamma (t_{k+1} - t_k). \quad (26)$$

Зауваження 3. Надалі будемо вважати, що $\gamma = 0$ в (8₂), $k_0 = 0$.

Теорема 1. Нехай:

- 1) $|t_{k+1} - t_k| \leq \Delta$, $\Delta > 0$, $k \in N$;
- 2) виконана умова Ліпшица (8₁);
- 3) у силу системи (1)–(3) для послідовності функціоналів Ляпунова-Красовського $\{v_k, k \geq 0\}$ має місце нерівність

$$(Lv_k)(y, x, h) < 0, \quad \forall k \in N, \quad y \in Y; \quad h \in H, \quad x \in D, \quad u \in R^r. \quad (27)$$

Тоді система (1)–(3) стійка за ймовірністю в цілому.

Доведення. Позначимо через F_{t_k} — мінімальну σ -алгебру, щодо якої вимірні $\xi(t)$ при всіх $[t_0, t_k]$ і η_n при $n \leq k$. Тоді умовне математичне сподівання можна обчислити за формулою [8]

$$\begin{aligned} & E \left\{ v_{k+1} \left(\xi(t_{k+1}), x_{t_{k+1}}, \eta_{k+1} \right) \middle| F_{t_k} \right\} = \\ & = \int_{Y \times D \times H} P_k(y, x, h) (dz_1 \times dz \times dw) v_{k+1}(z_1, z, w) \bigg|_{\substack{y = \xi(t_k) \\ h = \eta_k \\ x = x_k}} \end{aligned} \quad (28)$$

За визначенням дискретного оператора Ляпунова-Красовського $(Lv_k)(y, x, h)$ із рівності (28), на основі нерівності (27), одержимо

$$\begin{aligned} & E \left\{ v_{k+1} \left(\xi(t_{k+1}), x_{t_{k+1}}, \eta_{k+1} \right) \middle| F_{t_k} \right\} = \\ & = v_k \left(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k \right) + Lv_k \left(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k \right) \leq \bar{v} \left(|x_{t_k}| \right). \end{aligned} \quad (29)$$

Внаслідок леми 1, властивостей функціонала \bar{v} впливає існування умовного математичного сподівання лівої частини нерівності (29), тому що $|x(t_k)|$ при $\forall t_k \geq t_0$ внаслідок (23) обмежено константою, що пропорційна $|z|$ рівномірно за $y \in Y$; $h \in H$ і $t_0 \geq 0$, а саме

$$|x_{t_k}| \leq |z| (1 + \Lambda)^{k - k_0} e^{\Lambda(t_{k+1} - t_{k_0})}.$$

Тепер, на підставі (28), уздовж розв'язків (1)–(3) можна записати наступну нерівність

$$\begin{aligned} (Lv_k)(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k) &= E \left\{ v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), x_{t_{k+1}}, \eta_{k+1}) \middle| F_{t_k} \right\} - \\ & - v_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k) \leq -a_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k) \leq 0. \end{aligned} \quad (30)$$

Тоді при $k \in N$ виконується нерівність

$$E \left\{ v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), x_{t_{k+1}}, \eta_{k+1}) \middle| F_{t_k} \right\} \leq v_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k), \quad (31)$$

а, отже, послідовність випадкових величин $\{v_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k)\}$ при $k \in N$ утворить супермартиггал відносно F_{t_k} [7].

Взявши математичне сподівання від обох частин нерівності (30) і просумувавши за k від $n \geq k_0$ до N , отриманий вираз запишемо

$$\begin{aligned} & E \left\{ v_{N+1}(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x_{t_{N+1}}) \right\} - E \left\{ v_n(\xi(t_n), \eta_n, x_{t_n}) \right\} = \\ & = \sum_{k=n}^N E \left\{ L v_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k) \right\} \leq - \sum_{k=n}^N E \left\{ a_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k) \right\} \leq 0. \end{aligned} \quad (32)$$

Тому внаслідок леми 1 одержимо ланцюжок нерівностей для $\forall \varepsilon_1 > 0$

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{t \geq t_0} |x_t(t_0, y, x, h)| > \varepsilon_1 \right\} = \\ & = P \left\{ \sup_{n \in N} \sup_{t_{k_0+n-1} \leq t \leq t_{k_0+n}} |x_t(t_0, y, x, h)| > \varepsilon_1 \right\} \leq \\ & \leq P \left\{ \sup_{n \in N} (1 + \Lambda) e^{\Lambda(t_{k_0+n-1} - t_{k_0+n})} |x_{t_{k_0+n-1}}(t_0, y, x, h_0)| > \varepsilon_1 \right\} \leq \\ & \leq P \left\{ \sup_{n \in N} |x_{t_{k_0+n-1}}(t_0, y, x, h_0)| > \frac{\varepsilon_1}{(1 + \Lambda)} e^{-\Lambda \Delta} \right\} \leq \\ & \leq P \left\{ \sup_{n \in N} v_{k_0+n-1}(\xi(t_{k_0+n-1}), x_{t_{k_0+n-1}}, \eta_{k_0+n-1}) \geq \bar{v} \left(\frac{\varepsilon_1}{1 + \Lambda} e^{-\Lambda \Delta} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (33)$$

Якщо $|x_{t_k}| \geq r$, то на підставі (17) повинна виконуватися нерівність

$$\sup_{k \geq k_0} v_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k) \geq \inf_{\substack{k \geq k_0, y \in Y \\ h \in H, |x| \geq r}} v_k(y, x, h) = \bar{v}(r). \quad (34)$$

Скористаємося відомою нерівністю для невід'ємних супермартиггалів [7]

$$\begin{aligned} & P \left\{ \sup_{n \in N} v_{k_0+n-1}(\xi(t_{k_0+n-1}), x_{t_{k_0+n-1}}, \eta_{k_0+n-1}) \geq \bar{v} \left(\frac{\varepsilon_1}{1 + \Lambda} e^{-\Lambda \Delta} \right) \right\} \leq \\ & \leq \frac{1}{\bar{v} \left(\frac{\varepsilon_1}{1 + \Lambda} e^{-\Lambda \Delta} \right)} v_{k_0}(y, x, h) \leq \frac{\bar{v}(|z|)}{\bar{v} \left(\frac{\varepsilon_1}{1 + \Lambda} e^{-\Lambda \Delta} \right)}. \end{aligned} \quad (35)$$

З огляду на нерівність (33), нерівність (35) дає можливість стверджувати, що виконується (19), а значить система (1)–(3) стійка за ймовірністю в цілому [11]. Теорема 1 доведена.

Теорема 2. Нехай:

- 1) $|t_{k+1} - t_k| \leq \Delta, \Delta > 0, k \in N$;
- 2) виконана умова Ліпшица (8₁);
- 3) для системи (1)–(3) існують послідовності функціоналів Ляпунова-Красовського $\{v_k(y, x, h)\}$ і $\{a_k(y, x, h)\}$, $k \in N$, такі, що

$$(Lv_k)(y, x, h) \leq -a_k(y, x, h). \quad (36)$$

Тоді система (1)–(3) асимптотично стохастично стійка в цілому.

Доведення. Нерівність (32) дає оцінки

$$E\{v_{N+1}(\xi(t_{N+1}), x(t_{N+1}), \eta_{N+1})\} \leq v_{k_0}(y, x, h), \quad (37)$$

$$-\sum_{k=n}^N E\{a_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k)\} \leq v_{k_0}(y, x, h). \quad (38)$$

при всіх $N \geq k_0, y \in Y; h \in H, x \in D$.

Внаслідок того, що послідовність $\{a_k\}$, $k \in N$, утворить функціонала Ляпунова-Красовського, повинні існувати неперервні строго монотонні функції $\underline{a}(r)$ і $\bar{a}(r)$, рівні нулю в нулі і такі, що

$$\bar{a}(|x|) \leq a_k(y, x, h) \leq \underline{a}(|x|), \quad \forall k \in N, y \in Y; h \in H, x \in D.$$

Отже, із збіжності ряду в лівій частині нерівності (38) випливає збіжність ряду $\sum_{k=k_0}^{\infty} E\{\bar{a}(|x_{t_k}(t_0, y, x, h)|)\}$ для $\forall t_0 \geq 0, y \in Y; h \in H, x \in D$. Тоді внаслідок неперервності $\underline{a}(r)$ і рівності $\underline{a}(0) = 0$ маємо

$$\lim_{k \rightarrow \infty} |x_{t_k}(t_0, y, x, h)| = 0.$$

Із вищесказаного маємо прямування до 0 за ймовірністю послідовності $\bar{v}(|x_{t_k}(t_0, y, x, h)|)$ при $k \rightarrow \infty$ для $\forall t_0 \geq 0, y \in Y; h \in H, x \in D$.

Тому із властивостей функціонала Ляпунова-Красовського маємо, що невід'ємний супермартиггал $v_k(\xi(t_k), x_{t_k}, \eta_k)$ при $k \rightarrow \infty$ прямує до 0 за ймовірністю на всіх реалізаціях процесу $\xi(t) \equiv \xi(t, \omega)$ і послідовності η_k . Отже, невід'ємний обмежений зверху супермартиггал має границю із ймовірністю одиниця [5], [4]. Тоді, використовуючи результат леми 1, внаслідок означення 5, одержимо [11] асимптотичну стохастичну стійкість у цілому імпульсної системи (1)–(3).

Теорема 3. Нехай виконані умови 1)–3) теореми 2, причому функціонали Ляпунова-Красовського $\{v_k\}$, $\{a_k\}$, $k \geq 0$ для деяких $p > 0$ при $c_i > 0, i = \overline{1, 4}$ і для всіх $k \in N, y \in Y; h \in H, z \in D$, задовольняють нерівностям

$$c_1 |z(0)|^p \leq v_k(y, h, z) \leq c_2 \|z\|^p, \quad (39)$$

$$c_3 |z(0)|^p \leq a_k(y, h, z) \leq c_4 \|z\|^p. \quad (40)$$

Тоді система (1)–(3) асимптотично p -стійка в цілому.

Доведення. Використовуючи (30) при $n = k_0$, на підставі (39), для всіх $N \geq k_0$, $k_0 \in N$, $z \in D$ і початкових розподілах випадкового вектора $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$ можна отримати нерівність

$$\begin{aligned} E \left\{ |x_{t_{N+1}}|^p \right\} &\leq \frac{1}{c_1} E \left\{ v_{N+1} \left(\xi(t_{N+1}), \eta_{N+1}, x_{t_{N+1}} \right) \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{c_1} E \left\{ v_{k_0} \left(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, z \right) \right\} \leq \frac{c_2}{c_1} \|z\|^p. \end{aligned} \quad (41)$$

Звідси за означенням 6 випливає p -стійкість системи (1)–(3). Використовуючи нерівності (32), (39) і (40), виконаємо оцінку зверху

$$\begin{aligned} \sum_{k=k_0}^N E \left\{ |x_{t_k}|^p \right\} &\leq \frac{1}{c_3} \sum_{k=k_0}^N E \left\{ a_k \left(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k} \right) \right\} \leq \\ &\leq \frac{1}{c_3} E \left\{ v_{k_0} \left(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, z \right) \right\} \leq \frac{c_4}{c_3} \|z\|^p. \end{aligned} \quad (42)$$

Ця нерівність гарантує збіжність ряду, членами якого виступають $E \left\{ |x_{t_k}|^p \right\}$ для довільних початкових даних $x_{t_{k_0}} = z$ і початкових розподілів випадкового вектора $\{\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}\}$. Таким чином,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{y \in Y, h \in H} E \left\{ |x_{t_k}(t_0, y, h, z)|^p \right\} = 0$$

при всіх $t_0 \geq 0$, що і доводить теорему 3 [11].

Теорема 4. Нехай виконані всі умови теореми 1 і $\exists \Delta_1 > 0$, що

$$t_{k+1} - t_k \geq \Delta_1, \quad \forall k \in N. \quad (43)$$

Тоді система (1)–(3) експоненціально p -стійка в цілому.

Доведення. Внаслідок нерівності (26) (при $\gamma = 0$) досить довести, що нерівність (24) виконана для кожного $z \in D$ при $\forall t \in S$. Дійсно, для $\forall t \in (t_k, t_{k+1})$, $k > n$, із означення (27) для k_0 випливає нерівність

$$e^{-\gamma(t_k - t_{k_0})} \leq e^{-\gamma(t_k - t_0)} e^{\gamma \Delta}. \quad (44)$$

Використаємо позначення із доведення теореми 1 і доведену раніше рівність для $\forall k \in N$, $t \geq t_0 \geq 0$ і $z \in D$, $\xi(t_0) \in Y$, $\eta_{k_0} \in H$

$$\begin{aligned} E \left\{ v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x_{t_{k+1}}) \middle| F_k \right\} &= \\ = v_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}) + (Lv_k)(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}). \end{aligned} \quad (45)$$

3 умов теореми 4 впливає нерівність

$$(Lv_k)(y, h, z, \xi) \leq -a_k(y, h, z, \xi) \leq -c_3 \|z\|^p \leq -\frac{c_3}{c_2} v_k(y, h, z, \xi)$$

Тоді з (44) легко одержати оцінку зверху для умовного математичного сподівання

$$E \left\{ E \left\{ v_{k+1}(\xi(t_{k+1}), \eta_{k+1}, x_{t_{k+1}}) \middle| F_k \right\} \right\} \leq \left(1 - \frac{c_3}{c_2} \right) E \left\{ v_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}) \right\}. \quad (46)$$

Нехай $k_0 \geq 1$, тоді оцінка (46) для $\forall k \geq k_0$ дає нерівність

$$E \left\{ E \left\{ v_k(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}) \middle| F_{t_k} \right\} \right\} \leq \left(1 - \frac{c_3}{c_2} \right)^{k-k_0} E \left\{ v_{k_0}(\xi(t_{k_0}), \eta_{k_0}, x_{t_{k_0}}) \right\}.$$

Звідки внаслідок умов теореми отримуємо

$$E \left\{ \left| x_{t_k}(t_{k_0}, y, h, z) \right|^p \right\} \leq \frac{1}{c_1} E \left\{ v(\xi(t_k), \eta_k, x_{t_k}(t_{k_0}, y, h, z)) \right\} \leq \frac{c_2}{c_1} \left(1 - \frac{c_3}{c_2} \right)^{k-k_0} \|z\|^p.$$

Якщо вважати $c_2 > c_3$, тоді $\left(1 - \frac{c_3}{c_2} \right) \in (0, 1)$.

Скориставшись нерівністю (44), одержуємо доведення [11].

Висновки. Доведені основні теореми стійкості стохастичних диференціально-функціональних рівнянь з імпульсними марковськими збуреннями та скінченим запізненням при наявності випадкового процесу і запізнення одночасно.

Список використаних джерел:

1. Царьков Е. Ф. Квазилинейные стохастические функционально-дифференциальные уравнения / Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинский. — Рига : Ориентир, 1992. — 328 с.
2. Королюк В. С. Устойчивость динамических систем с последствием с учетом марковских возмущений / В. С. Королюк, В. И. Мусуриевский, И. В. Юрченко // Кибернетика и системный анализ. — 2007. — № 6. — С. 134–146.
3. Королюк В. С. Стабилизация импульсных динамических систем с конечным последствием при наличии марковских параметров. Часть I / В. С. Королюк, В. И. Мусуриевский, В. К. Ясинский // Проблемы управления и информатики. — 2008. — №1. — С. 16–35.
4. Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика : в 3-х т. / В. С. Королюк, Є. Ф. Царьков, В. К. Ясинський — Чернівці : Золоті литаври, 2009. — Т. 3. Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. — 798 с.

5. Кац И. Я. Метод функций Ляпунова в задачах устойчивости и стабилизации систем случайной структуры / И. Я. Кац. — Екатеринбург : Изд-во Уральской государственной академии путей сообщения, 1998. — 222 с.
6. Жакод Ж. Предельные теоремы для случайных процессов : в 2-х т. / Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. — М. : Физматгиз, 1994. — Т. 1. — 544 с.
7. Жакод Ж. Предельные теоремы для случайных процессов : в 2-х т. / Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. — М. : Физматгиз, 1994. — Т. 2. — 473 с.
8. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М. : Физматгиз, 1969. — 859 с.
9. Самойленко А. М. Дифференциальные уравнения с импульсными воздействиями / А. М. Самойленко, Н. А. Перестюк. — К. : Вища школа, 1987. — 287 с.
10. Свердан М. Л. Устойчивость стохастических импульсных систем / М. Л. Свердан, Е. Ф. Царьков. — Рига : РТУ, 1994. — 300 с.
11. Мусуриевский В. И. О проблеме устойчивости систем случайной структуры с постоянным запаздыванием / В. И. Мусуриевский // Проблемы управления и информатики. — 2011. — №5. — С. 5–15.

The problem of stability of stochastic differential-functional equations with impulse Markovian indignations and eventual behind. This system must be asymptotically stable by the probability and provide preassigned optimivity of a transient process.

Key words: *differential-functional equations, system odd structure, impulse Markovian indignations, eventual behind.*

Отримано: 25.03.2014

УДК 519.21

А. В. Нікітін, канд. фіз.-мат. наук

Буковинський державний

фінансово-економічний університет, м. Чернівці

ОПТИМІЗАЦІЯ МНОЖИН ПОЧАТКОВИХ ЗНАЧЕНЬ В ІНТЕГРАЛЬНІЙ МОМЕНТНІЙ СТИЙКОСТІ ДЛЯ ЛІНІЙНИХ СТОХАСТИЧНИХ РІВНЯНЬ У ГІЛЬБЕРТОВИХ ПРОСТОРАХ

Побудовано оптимальну множину початкових значень стохастичних диференціальних рівнянь з випадковими лінійними стрибками розв'язків у гільбертових просторах.

Ключові слова: *гільбертовий простір, оптимальна множина початкових значень, марковський процес.*

Вступ. При оптимізації множини початкових значень різницевої та диференційованих рівнянь з марковськими коефіцієнтами можливо застосувати результати, які отримані К. Г. Валєєвим та його учнями [1].

Розглядається система лінійних різницевих рівнянь із випадковими коефіцієнтами

$$X_{n+1} = A(\xi_{n+1}, \xi) X_n + B(\xi_{n+1}, \xi) U_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots),$$

де ξ_n — марковський процес, який визначається системою різнице-вих рівнянь

$$p_k(n+1) = \sum_{s=1}^q \pi_{ks} p_s(n), \quad p_k(n) \equiv P\{\xi_n = \theta_k\} \quad (k = 1, \dots, q) \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Вектор керувань U_n шукається з умови мінімуму квадратичного функціонала

$$v = \left\langle \sum_{n=0}^{\infty} X_n^* Q(\xi_n) X_n + U_n^* L(\xi_n) U_n \right\rangle.$$

оптимальне керування будується у вигляді

$$U_n = S(\xi_n) X_n \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

Продемонструємо даний підхід на прикладі дослідження стохастичних диференціальних рівнянь у гільбертових просторах.

Постановка задачі. Нехай $X(t)$ — векторний випадковий процес із гільбертового простору H , що є розв'язком рівняння

$$dX(t) = A(t, \xi(t)) X(t) dt + \sum_{j=1}^{\infty} B_j(t, \xi(t)) X(t) dW_j(t) + B(t, \xi(t)) u(t) dt, \quad (1)$$

$$X(0) = X_0, \quad (2)$$

де $\xi(t)$ — неперервний справа марковський процес, що набуває значень $\theta_1, \dots, \theta_q, \dots$. $A(t, \theta_s)$, $B_j(t, \theta_s)$, $s = \overline{1, q}$, $j = 1, 2, \dots$ неперервні на відрізьку $[0, T]$ функції, $W_1(t), W_2(t), \dots$ — незалежні між собою скалярні вінерові процеси, причому величини $(W_1(t), W_2(t), \dots, \xi(t), \zeta)$ незалежні.

Процеси $\xi(t), W_j(t)$, $j = 1, 2, \dots$, випадковий вектор X_0 та матриці $A(t, \theta_k), B(t, \theta_k)$ задовольняють тим же умовам, що і відповідні величини у рівнянні (1). Нехай також $B(t, \theta_k)$ — неперервна матриця на відрізьку $[0, T]$ розмірності $n \times p$, $u(t)$ — вектор-функція, яку ми будемо вибирати у вигляді $u(t) = L(t, \xi(t)) X(t)$, з неперервними на відрізьку $[0, T]$ матрицями $L(t, \theta_k)$, $k = \overline{1, q}$.

Зауважимо, що якщо випадкова величина задовольняє умові $\langle |X_0|^s \rangle < \infty$, $s \geq 1$, процес $X(t)$ володіє моментами s -го порядку.

Позначимо через $m^{(s)}(t)$ — s -ту моментну функцію, а через $G_s(\lambda)$ — множину s -тих момент них функцій величини X_0 , при

яких моментні функції $(G_s(\lambda), g_{0k}, g_k)$ — інтегрально моментно стійкі на інтервалі $(0, T)$, тобто для всіх $m^{(s)}(0) \in G_s(\lambda)$ повинні виконуватися нерівності

$$\int_0^T g_k(t, m^{(s)}(t)) dt + g_{0k}(m^{(s)}(T)) \leq 1, \quad k = \overline{1, N}. \quad (2)$$

Нехай $G_s(\lambda_1) \subseteq G_s(\lambda_2)$ якщо $\lambda_1 \leq \lambda_2$. Позначимо через $G_s(\lambda_{\max}^{(s)})$ — максимальну по включенню множину $G_s(\lambda)$, при якій виконуються умови (2).

Очевидно, що в множині $G_s(\lambda_{\max}^{(s)})$ параметр $\lambda_{\max}^{(s)}$ залежить від матричної функції $L(t, \theta_k), k = \overline{1, q}$.

Означення 1. Множину $\widehat{G}_s = G_s(\widehat{\lambda}_{\max}^{(s)})$, де $\widehat{\lambda}_{\max}^{(s)} = \sup_L \lambda_{\max}^{(s)}$ на- звемо оптимальною множиною початкових значень.

Твердження 1. Нехай функція $m^{(s)}(t) (G_s(\lambda), g_{0k}, g_k)$ інтегра- льно моментно стійка на інтервалі $(0, T)$. Тоді в оптимальній множи- ні початкових значень $\widehat{\lambda}_{\max}^{(s)}$ має вигляд

$$\widehat{\lambda}_{\max}^{(s)} = \left[\inf_L \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{G_s(1)} \mathfrak{Z}_k(L) \right]^{-\frac{1}{m}}, \quad (3)$$

де $\mathfrak{Z}_k(L) = \int_0^T g_k(t, m^{(s)}(t)) dt + g_{0k}(m^{(s)}(T))$.

Доведення. Оскільки $m^{(s)}(t) (G_s(\lambda), g_{0k}, g_k)$ інтегрально стійка на інтервалі $(0, T)$, то λ задовольняє нерівності

$$\lambda^{-m} \geq \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{G_s(1)} \mathfrak{Z}_k(L).$$

Звідси одержимо, що

$$\lambda_{\max}^{(s)}(L) = \left[\max_{1 \leq k \leq N} \sup_{G_s(1)} \mathfrak{Z}_k(L) \right]^{-\frac{1}{m}},$$

або

$$\widehat{\lambda}_{\max}^{(s)} = \sup_L \lambda_{\max}^{(s)}(L) = \left[\inf_L \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{G_s(1)} \mathfrak{Z}_k(L) \right]^{-\frac{1}{m}},$$

що і потрібно було показати.

Далі розглянемо випадок, коли $s = 1$ або $s = 2$. Позначимо $m^{(1)}(t) = m(t)$, $m^{(2)}(t) = D(t)$. Зауважимо, що мають місце рівності

$$m(t) = \sum_{k=1}^q m_k(t), \quad D(t) = \sum_{k=1}^q D_k(t),$$

де функції $m_k(t)$ та $D_k(t)$, $k = \overline{1, q}$ є розв'язками рівнянь

$$\frac{dm_k(t)}{dt} = A_{1k}(t)m_k(t) + \sum_{s=1}^q \alpha_{ks}(t)C_{ks}m_s(t), \quad (4)$$

$$m_k(0) = m(0)p_k, \quad k = \overline{1, q},$$

$$\frac{dD_k(t)}{dt} = A_{1k}(t)D_k(t) + D_k(t)A_{1k}^*(t) + \sum_{j=1}^{\infty} B_{jk}(t)D_k(t)B_{jk}^*(t) + \quad (5)$$

$$+ \sum_{s=1}^q \alpha_{ks}(t)C_{ks}D_s(t)C_{ks}^*, \quad D_k(0) = D(0)p_k, \quad k = \overline{1, q},$$

$$A_{1k}(t) = A_k(t) + B_k(t)L_k(t), \quad B_k(t) = B(t, \theta_k), \quad L_k(t) = L(t, \theta_k).$$

З твердження 1 випливає, що справедливими є рівності

$$\widehat{\lambda}_{\max}^{(s)} = \left[\inf_L \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{G_s(1)} \mathfrak{F}_{sk}(L) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad s = 1, 2, \quad (6)$$

де

$$\mathfrak{F}_{1k}(L) = \int_0^T g_k(t, m(t)) dt + g_{0k}(m(T)),$$

$$\mathfrak{F}_{2k}(L) = \int_0^T g_k(t, D(t)) dt + g_{0k}(D(T)).$$

Припустимо, що існують додатні константи α, β такі, для яких виконуються співвідношення

$$\alpha sp^m(D) \leq g_{0k}(D) \leq \beta sp^m(D), \quad k = \overline{1, N},$$

$$g_k(t, x) = g_k(t, D) = 0, \quad k = \overline{1, N}.$$

Твердження 2. Для оптимальної множини початкових значень \widehat{G}_2 справедливі вclusions $G_2(\lambda^-) \subseteq \widehat{G}_2 \subseteq G_2(\lambda^+)$, де

$$\lambda^+ = \alpha \sup_{G_2(1)} spD(0) \exp \left\{ - \inf_L \int_0^T \mu^-(\tau) d\tau \right\},$$

$$\lambda^- = \beta \sup_{G_2(1)} spD(0) \exp \left\{ - \inf_L \int_0^T \mu^+(\tau) d\tau \right\},$$

$$\mu^-(\tau) = \min_{1 \leq k \leq q} \lambda_{\min} (\tilde{A}_{1k} + B_k + C_k),$$

$$\mu^+(\tau) = \max_{1 \leq k \leq q} \lambda_{\max} (\tilde{A}_{1k} + B_k + C_k),$$

$$\tilde{A}_{1k} = A_{1k} + A_{1k}^*.$$

Доведення. Для $spD(t)$ справедливими є оцінки

$$spD(0) \exp \left\{ \int_0^T \mu^-(\tau) d\tau \right\} \leq spD(T) \leq spD(0) \exp \left\{ \int_0^T \mu^+(\tau) d\tau \right\},$$

оскільки виконуються нерівності

$$\alpha sp^m D(T) \leq g_{0k}(D(T)) \leq \beta sp^m D(T),$$

то

$$\left(\alpha \inf_L \sup_{G_2(1)} D(T) \right)^m \leq \inf_L \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{G_2(1)} g_{0k}(D(T)) \leq \left(\beta \inf_L \sup_{G_2(1)} D(T) \right)^m.$$

Тоді

$$\left(\beta \inf_L \sup_{G_2(1)} D(T) \right)^{-1} \leq \hat{\lambda}_{\max}^{(2)} \leq \left(\alpha \inf_L \sup_{G_2(1)} D(T) \right)^{-1},$$

тобто $\lambda^- \leq \hat{\lambda}_{\max}^{(2)} \leq \lambda^+$, а значить $G_2(\lambda^-) \subseteq \hat{G}_2 \subseteq G_2(\lambda^+)$, що і потрібно було показати.

Нехай справджуються рівності

$$g_{0k}(x) = |(g_{0k}, x)|, \quad g_k(x) = 0, \quad k = \overline{1, N}.$$

$$G_1(\lambda) = \{m_0 : (Q_0 m_0, m_0) \leq \lambda^2\},$$

g_{0k} — деякі вектори, Q_0 — додатно визначена матриця.

Твердження 3. Нехай функції $z_j^{(k)}(t)$ є розв'язками рівнянь

$$\frac{d}{dt} z_j^{(k)} + A_j^* z_j^{(k)} + \sum_{s=1}^q \alpha_{sj} C_{sj}^* z_s^{(k)} + g_k(t) = 0, \quad z^{(k)}(T) = g_{0k}, \quad k = \overline{1, N};$$

$\Phi(L)$ — неперервна додатна функція матричного аргументу. Тоді мають місце включення

$$G_1(\lambda_1) \subseteq G_1 \subseteq G_1(\lambda_2),$$

де

$$\lambda_2^{-2} = \max_{1 \leq k \leq N} \inf_L \left(Q_0^{-1} z^{(k)}, z^{(k)} \right),$$

$$\lambda_1^{-2} = \inf_L \left(\max_{1 \leq k \leq N} \left(Q_0^{-1} z^{(k)}, z^{(k)} \right) + \alpha \int_0^T \Phi(L(t)) dt \right),$$

$$z^{(k)} = \sum_{j=1}^q z_j^{(k)}(0) q_j, \quad \alpha > 0.$$

Доведення. Як відомо, $\lambda_{\max}^{-2} = \max_{1 \leq k \leq N} \left(Q_0^{-1} z^{(k)}, z^{(k)} \right)$, тобто

$$\left(\sup_L \lambda_{\max} \right)^{-1} = \inf_L \max_{1 \leq k \leq N} \left(Q_0^{-1} z^{(k)}, z^{(k)} \right)^{1/2}.$$

Оскільки,

$$\inf_L \max_{1 \leq k \leq N} \left(Q_0^{-1} z^{(k)}, z^{(k)} \right) \leq \max_{1 \leq k \leq N} \inf_L \left(Q_0^{-1} z^{(k)}, z^{(k)} \right),$$

$$\text{то } \sup_L \lambda_{\max} \leq \left[\max_{1 \leq k \leq N} \inf_L \left(Q_0^{-1} z^{(k)}, z^{(k)} \right) \right]^{-1/2} = \lambda_2.$$

Звідси випливає $\widehat{G} \subseteq G_1(\lambda_2)$.

З іншої сторони

$$\sup_L \lambda_{\max} \geq \lambda_1,$$

а значить $G_1(\lambda) \subseteq \widehat{G}_1$.

Нехай функції $g_k(t, D)$ та $g_{0k}(D)$ мають вигляд

$$g_k(t, D) = sp Q_k D, \quad g_{0k}(D) = sp Q_{0k} D,$$

де Q_0, Q_{1k} — невід'ємно визначені матриці. Справедливе твердження.

Твердження 4. Нехай функції $\Psi_j^{(k)}(t)$ є розв'язками рівнянь

$$\frac{d}{dt} \Psi_j^{(k)} + A_j^* \Psi_j^{(k)} + \Psi_j^{(k)} A_j + \sum_{s=1}^{\infty} B_{sj}^* \Psi_j^{(k)} B_{sj} +$$

$$+ \sum_{s=1}^q \alpha_{sj} C_{sj}^* \Psi_s^{(k)} C_{sj} + Q_k = 0, \quad \Psi_j^{(k)}(T) = Q_{1k}.$$

з матрицями $A_k = \overline{A_{1k}}$, $k = \overline{1, N}$. Тоді мають місце включення

$$G_2(\lambda_1) \subseteq \widehat{G}_2 \subseteq G_2(\lambda_2),$$

де

$$\lambda_1^{-1} = \inf_L \mathfrak{I}_\alpha(L), \quad \lambda_2^{-1} = \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{G_2(1)} \inf_L \mathfrak{I}_{1k}(L),$$

$$\mathfrak{I}_\alpha(L) = \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{G_2(1)} sp \Psi_k D + \alpha \int_0^T \Phi(L(t)) dt,$$

$$\mathfrak{I}_{1k} = sp\Psi_k D, \quad \Psi_k = \sum_{j=1}^q \Psi_j^{(k)}(0)q_j,$$

$\Phi(L)$ — додатна неперервна функція.

Доведення. Із нерівності

$$\lambda^{-1} \geq \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{G_2(1)} \left(\sum_{j=1}^q \left(\Psi_j^{(k)}(0) p_j \right) \circ D(0) \right), \quad (7)$$

слідуює, що

$$\sup_L \lambda_{\max} = \left[\inf_L \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{G_2(1)} sp\Psi_k D \right]^{-1}.$$

Оскільки

$$\inf_L \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{G_2(1)} sp\Psi_k D \geq \max_{1 \leq k \leq N} \inf_L sp\Psi_k D,$$

то $\inf_L \lambda_{\max} \leq \lambda_2$, крім того, $\inf_L \lambda_{\max} \geq \lambda_1$. Звідки одержимо $G_2(\lambda_1) \subseteq \subseteq \widehat{G}_2 \subseteq G_2(\lambda_2)$, що й потрібно було довести.

Нехай функції $\Psi_{j,\varepsilon}^{(k)}(t)$ є розв'язками рівнянь

$$\begin{aligned} \frac{d\Psi_{j,\varepsilon}^{(k)}}{dt} + A_{1j}^* \Psi_{j,\varepsilon}^{(k)} + \Psi_{j,\varepsilon}^{(k)} A_{1j} + \sum_{s=1}^{\infty} B_{sj}^* \Psi_{j,\varepsilon}^{(k)} B_{sj} + \\ + \sum_{s=1}^q \alpha_{sj} C_{sj}^* \Psi_{s,\varepsilon}^{(k)} C_{sj} + Q_k + \varepsilon L_j^*(t) L_j(t) = 0, \end{aligned} \quad (8)$$

$$\Psi_{j,\varepsilon}^{(k)}(T) = Q_k^{(2)}, \quad k = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, q}, \quad \Phi(L) = \sum_{j=1}^q spL_j^* L_j.$$

Твердження 5. Для довільного $\varepsilon > 0$ та неперервних матричних функцій $L_j^*(t)$, $j = \overline{1, q}$ має місце включення

$$G_2(\widehat{\lambda}_1) \subseteq \widehat{G}_2,$$

$$\text{де } \widehat{\lambda}_1^{-1} = \inf_L \mathfrak{I}_{1\varepsilon}(L), \quad \mathfrak{I}_{1\varepsilon}(L) = \max_{1 \leq k \leq N} \sup_{G_2(1)} sp\Psi_{k\varepsilon} D, \quad \Psi_{k\varepsilon} = \sum_{j=1}^q \Psi_{j,\varepsilon}^{(k)}(0)q_j.$$

Доведення. Нехай $\Psi_{j,\varepsilon}^{(k)}$ — розв'язки системи рівнянь. Тоді

$$\begin{aligned} sp\Psi_{k\varepsilon} D &= \int_0^T spQ_k D(t) dt + spQ_k^{(2)} D(T) + \varepsilon \sum_{j=1}^q \int_0^T spL_j^*(t) L_j(t) dt = \\ &= \sum_{j=1}^q \int_0^T sp(Q_k + L_j^*(t) L_j(t)) D_j(t) dt + \sum_{j=1}^q spQ_k^{(2)} D_j(T) \geq \end{aligned}$$

$$\geq \int_0^T spQ_k D(t) dt + spQ_k^{(2)} D(T) = sp\Psi_k D.$$

Звідки $L \sup_D \lambda_{\max} \geq \widehat{\lambda}_1$, а значить $G_2(\widehat{\lambda}_1) \subseteq \widehat{G}_2$, що і потрібно було показати.

Нехай далі $N = 1$. Тоді $\mathfrak{Z}_{1\varepsilon}(L) = \sup_{G_2(1)} sp\Psi_{1\varepsilon} D$.

Твердження 6. Справедливою є рівність

$$\inf_L \sup_{G_2(1)} sp\Psi_{1\varepsilon} D = \sup_{G_2(1)} spP_\varepsilon D,$$

де $P_\varepsilon = \sum_{j=1}^q P_{j,\varepsilon}(0) q_j$, а функції $P_{j,\varepsilon}(t)$ є розв'язками рівнянь Ріккати

$$\frac{dP_{j,\varepsilon}}{dt} = A_j^* P_{j,\varepsilon} A_j + \sum_{s=1}^{\infty} B_{sj}^* P_{j,\varepsilon} B_{sj} + \sum_{s=1}^q \alpha_{sj} C_{sj}^* P_{s,\varepsilon} C_{sj} - \frac{1}{\varepsilon} P_{j,\varepsilon} B_j B_j^* P_{j,\varepsilon} + Q_1 = 0,$$

$$P_{j,\varepsilon}(T) = Q_1^{(2)}.$$

Доведення. Оскільки $\inf_L \sup_{G_2(1)} sp\Psi_{1\varepsilon} D \geq \sup_{G_2(1)} \inf_L sp\Psi_{1\varepsilon} D$, то застосовуючи принцип максимуму Понтрягіна знайдемо $\inf_L sp\Psi_{1\varepsilon} D$.

Введемо функцію Понтрягіна

$$\begin{aligned} \Pi(\Psi, \varphi, L, t) &= \sum_{j=1}^q sp \left(A_{1j}^* \Psi_{j\varepsilon} + \Psi_{j,\varepsilon} A_{1j} + \sum_{s=1}^{\infty} B_{sj}^* \Psi_{j\varepsilon} B_{sj} + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{s=1}^q \alpha_{sj} C_{sj}^* \Psi_{s,\varepsilon} C_{sj} + Q_k + \varepsilon L_j^* L_j \right) \varphi_j^* = \\ &= \sum_{j=1}^q sp L_j^* B_j^* \Psi_{j\varepsilon} \varphi_j^* + \sum_{j=1}^q sp \Psi_{j,\varepsilon} B_j L_j \varphi_j^* + \sum_{j=1}^q \varepsilon sp L_j^* L_j \varphi_j^* = \\ &= \sum_{j=1}^q sp \left[L_j^* B_j^* \Psi_{j\varepsilon} + \Psi_{j,\varepsilon} B_j L_j + \varepsilon L_j^* L_j \right] \varphi_j^* + d. \end{aligned}$$

Оскільки d не залежить від L_j , $j = \overline{1, q}$, то

$$\begin{aligned} \max_L \Pi(\Psi, \varphi, L, t) &= \sum_{j=1}^q \max_{L_j} sp = \sum_{j=1}^q sp \left[L_j^* B_j^* \Psi_{j\varepsilon} + \Psi_{j,\varepsilon} B_j L_j + \varepsilon L_j^* L_j \right] \varphi_j^* + d = \\ &= \sum_{j=1}^q sp \left[\widehat{L}_j^* B_j^* \Psi_{j\varepsilon} + \Psi_{j,\varepsilon} B_j \widehat{L}_j + \varepsilon \widehat{L}_j^* L_j \right] \varphi_j^* + d, \end{aligned}$$

де φ_j — матричні функції, що є розв'язками спряжених рівнянь до рівнянь для функції $\Psi_{j\varepsilon}(t)$, а $\widehat{L}_j = -\frac{1}{\varepsilon} B_j^* P_{j,\varepsilon}(t)$ і матричні функції $P_{j,\varepsilon}(t)$ є розв'язками рівняння Ріккати

$$-\frac{dP_{j,\varepsilon}}{dt} = A_j^* P_{j,\varepsilon} + P_{j,\varepsilon} A_j + \sum_{s=1}^{\infty} B_{sj}^* P_{j,\varepsilon} B_{sj} + \\ + \sum_{s=1}^q \alpha_{sj} C_{sj}^* P_{s,\varepsilon} C_{sj} - \frac{1}{\varepsilon} P_{j,\varepsilon} B_j B_j^* P_{j,\varepsilon} + Q_1 = 0, \\ P_{j,\varepsilon}(T) = Q_{01},$$

причому

$$P_{1,\varepsilon} = \Psi_{j,\varepsilon} \Big|_{L=\widehat{L}}.$$

Оскільки \widehat{L}_j — не залежні від матриці D , то

$$\inf_L \sup_{G_2(1)} sp \Psi_{1,\varepsilon} D = \sup_L \inf_{G_2(1)} sp \Psi_{1,\varepsilon} D = \sup_{G_2(1)} \sum_{j=1}^q P_{j,\varepsilon}(0) q_j D,$$

що і потрібно було довести.

Висновки. Знайдено оптимальні множини початкових значень, при яких моменти розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь є інтегрально стійкими.

Список використаних джерел:

1. Валеев К. Г. Оптимизация линейных систем со случайными коэффициентами / К. Г. Валеев, О. Л. Карелова В. И. Горелов. — М. : Изд-во Рос. унта дружбы народов, 1996. — 258 с.
2. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1982. — 612 с.
3. Скороход А. В. Асимптотические методы теории стохастических дифференциальных уравнений / А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1987. — 328 с.
4. Korolyuk V. S. Stochastic Models of Systems / V. S. Korolyuk, V. V. Korolyuk // Kluwer. — Dordrecht. — 1999. — 185 p.
5. Koroliuk V. Stochastic Systems in Merging Phase Space / V. Koroliuk, N. Limnios // World Scientific Publishing. — 2005. — 330 p.

We construct an optimal set of initial values of stochastic differential equations with jumps of random linear solutions in Hilbert spaces.

Key words: *Hilbert space, the optimal set of initial values, Markov process.*

Отримано: 16.04.2014

UDC 517.946

T. M. Pylypiuk, assistant

Kamianets-Podilsky Ivan Ohienko National University,
Kamianets-Podilsky

ONE PROBLEM OF TORSION OF PIECEWISE HOMOGENEOUS ELASTIC BODIES

By means of method of hybrid integral transform of Legendre-Fourier-Fourier type integral representation of exact analytical solution of the problem of torsion of semi-bounded piecewise homogeneous elastic cylinder is obtained.

Key words: *Legendre equation, Fourier equation, Sturm-Liouville problem, hybrid integral transform, hybrid differential operator, the main solutions.*

Introduction. The problems of the theory of torsion of elastic bodies with different geometric structure are of considerable theoretical and practical interest [1–3]. One of the effective methods for solving such problems in the case of piecewise-homogeneous environments is a method of hybrid integral transforms. The hybrid integral transform of Legendre-Fourier-Fourier type is constructed in this paper, and this transform is applied for solving the problem of torsion of semi-bounded piecewise homogeneous elastic cylinder with different physical and mechanical characteristics.

Formulation of the problem. Let's consider a semi-bounded piecewise homogeneous elastic cylinder with radius R , which is composed of different materials. Physical and mechanical properties of this cylinder are changed according to the law

$$G(z) = G_1 shz\theta(z)\theta(l_1 - z) + G_2\theta(z - l_1)\theta(l_2 - z) + G_3\theta(z - l_2),$$

$$G_j = const; \quad j = 1, 3,$$

here $\theta(x)$ is the Heaviside step function.

We consider inhomogeneous areas of cylinder be soldered together, and the bottom end $z = 0$ is free from stress. We consider that the movement is limited if $z = +\infty$, and lateral surface of the cylinder is loaded efforts $f(z)$.

The problem of torsion of such cylinder mathematically is reduced to a construction bounded on the set

$$D = \{(r, z) : r \in (0, R); z \in (0, l_1) \cup (l_1, l_2) \cup (l_2, +\infty)\}$$

solution of differential separate system of partial differential equations [1]

$$\left(B_1 + \Lambda_0 - \frac{1}{4} \right) u_1(r, z) = -F_1(r, z), \quad z \in (0, l_1),$$

$$\left(B_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_2(r, z) = -F_2(r, z), \quad z \in (l_1, l_2), \quad (1)$$

$$\left(B_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) u_3(r, z) = -F_3(r, z), \quad z \in (l_2, +\infty),$$

with boundary conditions

$$\frac{\partial u_j}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0, \quad \frac{\partial u_j}{\partial r} \Big|_{r=0} = 0, \quad \left(\frac{\partial u_j}{\partial r} - \frac{1}{r} u_j \right) \Big|_{r=R} = \frac{f(z)}{G_j(z)}, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (2)$$

and conditions of mechanical contact

$$\left\{ \begin{aligned} (u_1 - u_2) \Big|_{z=l_1} &= 0, \\ \left(G_1 shz \frac{\partial u_1}{\partial z} - G_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_1} &= 0, \end{aligned} \right. \quad \left\{ \begin{aligned} (u_2 - u_3) \Big|_{z=l_2} &= 0, \\ \left(G_2 \frac{\partial u_2}{\partial z} - G_3 \frac{\partial u_3}{\partial z} \right) \Big|_{z=l_2} &= 0, \end{aligned} \right. \quad (3)$$

here $B_1 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r^2}$ is Bessel operator, $\Lambda_0 = \frac{\partial^2}{\partial z^2} + cthz \frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{4}$ is

Legendre operator.

The main part. Let's construct the exact analytical solution of the boundary value problem of conjugation (1)–(3) by the method of hybrid integral transform of Legendre-Fourier-Fourier type.

1. The hybrid integral transform of Legendre-Fourier-Fourier type. Let's consider the singular spectral Sturm-Liouville problem of the structure of solution, which is limited on the set

$$I_2^+ = \{r : r \in (0, R_1) \cup (R_1, R_2) \cup (R_2, +\infty)\}$$

of separate system of ordinary differential Legendre and Fourier equations of the 2-nd order

$$L_1[V_1] \equiv \left(\Lambda_\mu + b_1^2 a_1^{-2} \right) V_1(r) = 0, \quad r \in (0, R_1), \quad (4)$$

$$L_m[V_m] \equiv \left(\frac{d^2}{dr^2} + b_m^2 a_m^{-2} \right) V_m(r) = 0, \quad r \in (R_{m-1}, R_m); \quad m = 2, 3; \quad R_3 = +\infty$$

with the conjugate conditions

$$\left[\left(\alpha_{j1}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j1}^k \right) V_k(r) - \left(\alpha_{j2}^k \frac{d}{dr} + \beta_{j2}^k \right) V_{k+1}(r) \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j, k = 1, 2, \quad (5)$$

here $a_j > 0$; $\alpha_{jk}^m \geq 0$; $\beta_{jk}^m \geq 0$; $b_j = (\lambda^2 + \gamma_j^2)^{1/2}$; $\gamma_j^2 \geq 0$; $c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0$; $\Lambda_\mu = \frac{d^2}{dr^2} + cthr \frac{d}{dr} + \frac{1}{4} - \frac{\mu^2}{sh^2 r}$; $\mu > -\frac{1}{2}$; Λ_μ is Legendre operator [4].

The fundamental system of solutions for the equation $L_1[V_1]=0$ is formed by attached Legendre functions $P_{\frac{1}{2}+iq_1}^\mu(chr)$ and $L_{\frac{1}{2}+iq_1}^\mu(chr)$ [4], and for equation $L_m[V_m]=0$ — by trigonometric functions $\cos q_m r$ and $\sin q_m r$ [5]; $q_j = a_j^{-1} b_j(\lambda^2)$.

It is directly verify that functions

$$\begin{aligned}
 V_{\mu,1}(r, \lambda) &= c_{21}c_{22}q_2(\lambda)q_3(\lambda)P_{\frac{1}{2}+iq_1}^\mu(chr), \\
 V_{\mu,2}(r, \lambda) &= c_{22}q_3(\lambda) \left[Z_{\frac{1}{2}+iq_1;11}^{11,\mu}(chR_1)\phi_{22}^1(q_2R_1, q_2r) - \right. \\
 &\quad \left. - Z_{\frac{1}{2}+iq_1;21}^{11,\mu}(chR_1)\phi_{12}^1(q_2R_1, q_2r) \right], \\
 V_{\mu,3}(r, \lambda) &= \omega_{\mu,2}(\lambda) \cos q_3 r - \omega_{\mu,1}(\lambda) \sin q_3 r
 \end{aligned} \tag{6}$$

are the solution of the boundary value problem (4), (5).

We use such denotation in equalities (6):

$$\begin{aligned}
 \omega_{\mu,j}(\lambda) &= v_{22}^{2j}(q_3R_2) \left[Z_{\frac{1}{2}+iq_1;21}^{11,\mu}(chR_1)\delta_{11}(q_2R_1, q_2R_2) - \delta_{21}(q_2R_1, q_2R_2) \times \right. \\
 &\quad \left. \times Z_{\frac{1}{2}+iq_1;11}^{11,\mu}(chR_1) \right] - v_{12}^{2j}(q_3R_2) \left[\delta_{12}(q_2R_1, q_2R_2) Z_{\frac{1}{2}+iq_1;21}^{11,\mu}(chR_1) - \right. \\
 &\quad \left. - \delta_{22}(q_2R_1, q_2R_2) Z_{\frac{1}{2}+iq_1;11}^{11,\mu}(chR_1) \right], \quad j = 1, 2;
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\delta_{jk}(x, y) = v_{j2}^{11}(x)v_{k1}^{22}(y) - v_{j2}^{12}(x)v_{k1}^{21}(y), \quad j, k = 1, 2;$$

$$v_{mj}^{k1}(q_s R_k) = -\alpha_{mj}^k q_s \sin q_s R_k + \beta_{jm}^k \sin q_s R_k;$$

$$v_{mj}^{k2}(q_s R_k) = \alpha_{mj}^k q_s \sin q_s R_k + \beta_{jm}^k \sin q_s R_k;$$

$$Z_{v_1, j_1}^{1,\mu}(chq_1 R_1) = \alpha_{j_1}^1 shR_1 \cdot P_{v_1}^{\mu'}(chR_1) + \beta_{j_1}^1 P_{v_1}^\mu(chR_1), \quad v_1 = -\frac{1}{2} + iq_1;$$

bar means the derivative of the argument.

Let's define values and functions:

$$\sigma_1 = \frac{c_{11}c_{12}}{c_{21}c_{22}} \frac{a_1^{-2}}{shR_1}, \quad \sigma_2 = \frac{c_{12}}{c_{22}} a_2^{-2}, \quad \sigma_3 = a_3^{-2};$$

$$+V_{\mu,3}(r, \lambda)\theta(r - R_2); \Omega_{\mu}(\lambda) = \lambda q_3^{-1}([\omega_{\mu,1}(\lambda)]^2 + [\omega_{\mu,2}(\lambda)]^2)^{-1},$$

$$\sigma(r) = \sigma_1 shr\theta(r)\theta(R_1 - r) + \sigma_2\theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) + \sigma_3\theta(r - R_2). \quad (8)$$

Theorem 1. If the function

$$g(r) = f(r)[\sqrt{shr}\theta(r)\theta(R_1 - r) + \theta(r - R_1)\theta(R_2 - r) + \theta(r - R_2)]$$

is piecewise continuous, absolutely summable and has bounded variation in the interval $(0; +\infty)$, then for $r \in I_2^+$ integral representation is true

$$\frac{1}{2}[f(r-0) + f(r+0)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} V_{\mu}(r, \lambda)\Omega_{\mu}(\lambda)d\lambda \int_0^{\infty} f(\rho)V_{\mu}(\rho, \lambda)\sigma(\rho)d\rho. \quad (9)$$

Proof. Functions $V_{\mu,j}(r, \lambda)$ and $V_{\mu,j}(r, \beta)$ are the solutions of differential equations

$$\begin{cases} \left[\Lambda_{\mu} + a_1^{-2}(\lambda^2 + \gamma_1^2) \right] V_{\mu,1}(r, \lambda) = 0, \\ \left[\Lambda_{\mu} + a_1^{-2}(\beta^2 + \gamma_1^2) \right] V_{\mu,1}(r, \beta) = 0; \end{cases} \quad (10)-(11)$$

$$\begin{cases} \left[\frac{d^2}{dr^2} + a_j^{-2}(\lambda^2 + \gamma_j^2) \right] V_{\mu,j}(r, \lambda) = 0, \\ \left[\frac{d^2}{dr^2} + a_j^{-2}(\beta^2 + \gamma_j^2) \right] V_{\mu,j}(r, \beta) = 0, \quad j = 2, 3. \end{cases} \quad (12)-(13)$$

Let's multiply the equality (10) on the function $V_{\mu,1}(r, \beta)shr$, and equality (11) — on the function $V_{\mu,1}(r, \lambda)shr$ and subtract second from the first. We obtain:

$$\begin{aligned} & V_{\mu,1}(r, \lambda)V_{\mu,1}(r, \beta)shr = \\ & = \frac{a_1^2}{\lambda^2 - \beta^2} \frac{d}{dr} \left[shr \left(V_{\mu,1}(r, \lambda) \frac{dV_{\mu,1}(r, \beta)}{dr} - V_{\mu,1}(r, \beta) \frac{dV_{\mu,1}(r, \lambda)}{dr} \right) \right]. \end{aligned} \quad (14)$$

Let's multiply the equality (12) on the function $V_{\mu,j}(r, \beta)$, and equality (13) — on the function $V_{\mu,j}(r, \lambda)$ and subtract second from first. We obtain:

$$\begin{aligned} & V_{\mu,j}(r, \lambda)V_{\mu,j}(r, \beta) = \frac{a_j^2}{\lambda^2 - \beta^2} \times \\ & \times \frac{d}{dr} \left[V_{\mu,j}(r, \lambda) \frac{dV_{\mu,j}(r, \beta)}{dr} - V_{\mu,j}(r, \beta) \frac{dV_{\mu,j}(r, \lambda)}{dr} \right]. \end{aligned} \quad (15)$$

Let's set a fairly large number $R > R_2$. Let's multiply the equality (14) on $\sigma_1 dr$ and integrate from 0 to R_1 , and equality (15) let's multiply

on $\sigma_j dr$ and integrate from R_j to R_{j+1} ($j=1,2; R_3 = +\infty$). At the result of adding the integrals we have, that

$$\int_0^R V_\mu(r, \lambda) V_\mu(r, \beta) \sigma(r) = \frac{1}{\lambda^2 - \beta^2} \left[V_{\mu,j}(r, \lambda) \frac{d}{dr} V_{\mu,3}(r, \beta) - V_{\mu,3}(r, \beta) \frac{d}{dr} V_{\mu,j}(r, \lambda) \right] \Bigg|_{r=R} \quad (16)$$

Let's calculate the double integral

$$I = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_c^d g(\lambda) V_\mu(r, \lambda) \Omega_\mu(\lambda) d\lambda V_\mu(r, \beta) \sigma(r) dr \quad (17)$$

for arbitrary positive numbers c and d ($c < d$) and arbitrary finite function $g(\lambda)$, which is defined on the segment $[c, d]$.

Due to the equation (16) double integral (17) can be rewritten as:

$$I = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_c^d \frac{g(\lambda)}{\lambda^2 - \beta^2} \left[V_{\mu,3}(R, \lambda) \frac{d}{dr} V_{\mu,3}(R, \beta) - V_{\mu,3}(R, \beta) \frac{d}{dr} V_{\mu,3}(R, \lambda) \right] \Omega_\mu(\lambda) d\lambda \quad (18)$$

As a result of elementary transformations we obtain that

$$\begin{aligned} & 2 \left[V_{\mu,3}(R, \lambda) \frac{d}{dr} V_{\mu,3}(R, \beta) - V_{\mu,3}(R, \beta) \frac{d}{dr} V_{\mu,3}(R, \lambda) \right] = [q_3(\lambda) - q_3(\beta)] \times \\ & \times \left\{ \omega_{\mu,2}(\lambda) \omega_{\mu,2}(\beta) - \omega_{\mu,1}(\lambda) \omega_{\mu,1}(\beta) \right\} \sin R[q_3(\lambda) + q_3(\beta)] + [q_3(\lambda) + q_3(\beta)] \times \\ & \times \left\{ \omega_{\mu,1}(\lambda) \omega_{\mu,1}(\beta) + \omega_{\mu,2}(\lambda) \omega_{\mu,2}(\beta) \right\} \sin R[q_3(\lambda) - q_3(\beta)] + \quad (19) \\ & + [q_3(\lambda) - q_3(\beta)] \times \left\{ \omega_{\mu,1}(\lambda) \omega_{\mu,2}(\beta) + \omega_{\mu,1}(\beta) \omega_{\mu,2}(\lambda) \right\} \cos R[q_3(\lambda) + q_3(\beta)] + \\ & + [q_3(\lambda) + q_3(\beta)] \times \left\{ \omega_{\mu,1}(\lambda) \omega_{\mu,2}(\beta) - \omega_{\mu,1}(\beta) \omega_{\mu,2}(\lambda) \right\} \cos R[q_3(\lambda) - q_3(\beta)]. \end{aligned}$$

If to assume that the function $g(\lambda)$ is continuous, absolutely integrable and has bounded variation on $[c, d]$, then substituting (19) into (18), with further using Dirichlet and Riemann lemmas [6] leads to the equality

$$I \equiv \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_c^d g(\lambda) V_\mu(r, \lambda) \Omega_\mu(\lambda) d\lambda V_\mu(r, \beta) \sigma(r) dr = \begin{cases} g(\beta), & \beta \in [c, d]; \\ 0, & \beta \notin [c, d]. \end{cases} \quad (20)$$

If the function $g(\lambda)$ has properties on the interval $(0, +\infty)$, which discussed above, then we obtain that

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(\lambda) V_{\mu}(r, \lambda) \Omega_{\mu}(\lambda) d\lambda V_{\mu}(r, \beta) \sigma(r) dr = \begin{cases} g(\beta), & \beta \in [c, d]; \\ 0, & \beta \notin [c, d]. \end{cases} \quad (21)$$

Let now the function

$$f(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} g(\lambda) V_{\mu}(r, \lambda) \Omega_{\mu}(\lambda) d\lambda. \quad (22)$$

Let's multiply the equality (22) on $V_{\mu}(r, \beta) \sigma(r) dr$, where β is arbitrary positive number and integrate by r from $r = 0$ to $r = +\infty$. Due to equation (21) we have that

$$\int_0^{\infty} f(r) V_{\mu}(r, \beta) \sigma(r) dr = g(\beta). \quad (23)$$

Let's substitute the function $g(\lambda) = \int_0^{\infty} f(\rho) V_{\mu}(\rho, \lambda) \sigma(\rho) d\rho$ to equality (22). We obtain the integral representation

$$f(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} V_{\mu}(r, \lambda) \Omega_{\mu}(\lambda) d\lambda \int_0^{\infty} f(\rho) V_{\mu}(\rho, \lambda) \sigma(\rho) d\rho. \quad (24)$$

Rejection from continuity of the function $f(r)$ in the point r leads to the integral representation (9). **The theorem is proved.**

The integral representation (9) defines the direct

$$H_{\mu;2}[f(r)] = \int_0^{\infty} f(r) V_{\mu}(r, \lambda) \sigma(r) dr \equiv \tilde{f}(\lambda) \quad (25)$$

and inverse

$$H_{\mu;2}^{-1}[\tilde{f}(\lambda)] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \tilde{f}(\lambda) V_{\mu}(r, \lambda) \Omega_{\mu}(\lambda) d\lambda \equiv \frac{1}{2} [f(r-0) + f(r+0)] \quad (26)$$

hybrid integral transform of Legendre-Fourier-Fourier type.

Algebra of hybrid differential operator

$$M_{\mu} = a_1^2 \theta(r) \theta(R_1 - r) \Lambda_{\mu} + a_2^2 \theta(r - R_1) \theta(R_2 - r) \frac{d}{dr^2} + a_3^2 \theta(r - R_2) \frac{d^2}{dr^2}$$

can be constructed due to the main identity.

Theorem 2. If the function $f(r)$ is a twice continuously differentiable on the set I_2^+ , satisfies the conjugation conditions and conditions of the limited

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left[shr \left(\frac{df}{dr} V_{\mu,1}(r, \lambda) - f(r) \frac{d}{dr} V_{\mu,1}(r, \lambda) \right) \right] = 0,$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \left(\frac{df}{dr} V_{\mu,3} - f \frac{dV_{\mu,3}}{dr} \right) = 0, \quad (27)$$

then the basic identity of integral transform of hybrid differential operator M_μ is true:

$$H_{\mu,2} [M_\mu[f(r)]] = -\lambda^2 \tilde{f}(\lambda) - \sum_{j=1}^3 \gamma_j^2 \int_{R_{j-1}}^{R_j} f(r) V_{\mu,j}(r, \lambda) \sigma_j \varphi_j(r) dr, \quad (28)$$

$$R_0 = 0, \quad R_3 = +\infty; \quad \varphi_1(r) = shr; \quad \varphi_2(r) = \varphi_3(r) = 1.$$

Proof. Let's define the values:

$$f^-(R_k) = \lim_{r \rightarrow R_k-0} f(r), \quad f^+(R_k) = \lim_{r \rightarrow R_k+0} f(r);$$

$$\alpha_{11}^k = \alpha_{11}^k \alpha_{22}^k - \alpha_{21}^k \alpha_{12}^k, \quad \alpha_{12}^k = \alpha_{11}^k \beta_{22}^k - \alpha_{21}^k \beta_{12}^k,$$

$$\alpha_{21}^k = \beta_{11}^k \alpha_{22}^k - \beta_{21}^k \alpha_{12}^k, \quad \alpha_{22}^k = \beta_{11}^k \beta_{22}^k - \beta_{12}^k \beta_{21}^k.$$

From the conjugate conditions we find the relations:

$$\frac{df^-(R_j)}{dr} = \frac{1}{c_{1j}} \left[\alpha_{21}^j \frac{df^+}{dr}(R_j) + \alpha_{12}^j f^+(R_j) \right] \quad (29)$$

$$f^-(R_j) = -\frac{1}{c_{1j}} \left[\alpha_{11}^j \frac{df^+}{dr}(R_j) + \alpha_{22}^j f^+(R_j) \right], \quad j = 1, 2$$

The components $V_{\mu,j}(r, \lambda)$ of the spectral function $V_\mu(r, \lambda)$ have the same connections:

$$V_{\mu,j}(R_j, \lambda) = -\frac{1}{c_{1j}} \left[\alpha_{11}^j \frac{dV_{\mu,j+1}(R_j, \lambda)}{dr} + \alpha_{12}^j V_{\mu,j+1}(R_j, \lambda) \right], \quad (30)$$

$$\frac{dV_{\mu,j}(R_j, \lambda)}{dr} = \frac{1}{c_{1j}} \left[\alpha_{21}^j \frac{dV_{\mu,j+1}(R_j, \lambda)}{dr} + \alpha_{22}^j V_{\mu,j+1}(R_j, \lambda) \right].$$

From equations (29) and (30) the identity follows

$$\begin{aligned} & \frac{df^-(R_j)}{dr} V_{\mu,j}(R_j, \lambda) - f^-(R_j) \frac{dV_{\mu,j}(R_j, \lambda)}{dr} = \\ & = \frac{c_{2j}}{c_{1j}} \left[\frac{df^+(R_j)}{dr} V_{\mu,j+1}(R_j, \lambda) - f^+(R_j) \frac{dV_{\mu,j+1}(R_j, \lambda)}{dr} \right], \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (31)$$

The proof of the theorem is obtained by integration by parts under the integral with following using of the limited conditions (27), identity (31), the properties of functions $V_{\mu,1}, V_{\mu,2}, V_{\mu,3}, f(r)$ and structures of $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$. **The theorem is proved.**

The identity (28) makes it possible to apply the introduced hybrid integral transform of Legendre-Fourier-Fourier type to the solving of singular problems of mathematical physics of inhomogeneous structures.

2. The solution of the problem (1)–(3). Let's write the system (1) and boundary conditions (2) in matrix form:

$$\begin{bmatrix} (B_1 + \Lambda_0 - \frac{1}{4})u_1(r, z) \\ (B_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2})u_2(r, z) \\ (B_1 + \frac{\partial^2}{\partial z^2})u_3(r, z) \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} F_1(r, z) \\ F_2(r, z) \\ F_3(r, z) \end{bmatrix}, \quad (32)$$

$$\left. \frac{\partial}{\partial r} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right|_{r=0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \left. \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r} \right) \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \right|_{r=R} = \begin{bmatrix} f_1(z)(G_1shz)^{-1} \\ f_2(z)G_2^{-1} \\ f_2(z)G_3^{-1} \end{bmatrix}. \quad (33)$$

Listed by equations (6)–(8) values and functions for this case ($\alpha_{11}^k = \beta_{21}^k = \alpha_{12}^k = \beta_{22}^k = 0$, $\beta_{11}^k = \beta_{12}^k = 1$, $k = 1, 2$; $\alpha_{21}^1 = G_1shl_1$, $\alpha_{22}^1 = G_2 = \alpha_{21}^2$, $\alpha_{22}^2 = G_3$, $\mu = 0$) we denote by $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\sigma}_3$, $V_{11}(z, \lambda)$, $V_{21}(z, \lambda)$ and $V_{31}(z, \lambda)$. In this case $c_{11} = G_1shl_1$, $c_{12} = c_{21} = G_2$, $c_{22} = G_3$, $G_i = const$. Spectral density for this case we denote by $\Omega_0(\lambda)$.

Let's represent the integral operator $H_{0;2}$, which acts by the formula (25) as an operator matrix-row

$$H_{0;2}[\dots] = \left[\int_0^{l_1} \dots V_{11}(z, \lambda) \bar{\sigma}_1 shz dz \quad \int_{l_1}^{l_2} \dots V_{21}(z, \lambda) \bar{\sigma}_2 dz \quad \int_{l_2}^{+\infty} \dots V_{31}(z, \lambda) dz \right]. \quad (34)$$

Let's apply the operator matrix-row (34) to the problem (32), (33) according to matrices multiplication rule. As a result of main identity (28)

(when $a_1^2 = a_2^2 = a_3^2 = 1$, $\gamma_1^2 = 0$, $\gamma_2^2 = \gamma_3^2 = \frac{1}{4}$) we get a boundary value problem: to construct a limited in the interval $(0, R)$ solution of Bessel equation for modified functions

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \left(q^2 + \frac{1}{r^2} \right) \right] \tilde{u}(r, \lambda) = -\tilde{F}(r, \lambda); \quad q^2 = \lambda^2 + \frac{1}{4} \quad (35)$$

with boundary conditions

$$\left. \frac{d\tilde{u}}{dr} \right|_{r=0} = 0, \quad \left. \left(\frac{d}{dr} - \frac{1}{r} \right) \tilde{u} \right|_{r=R} = \tilde{f}(\lambda). \quad (36)$$

It is possible to verify that the desired solution of the boundary value problem (35), (36) is a function

$$\tilde{u}(r, \lambda) = \tilde{W}(r, \lambda)\tilde{f}(\lambda) + \int_0^R \tilde{E}(r, \rho, \lambda)\tilde{F}(\rho, \lambda)\rho d\rho. \quad (37)$$

In the formula (37) there are the Green's function

$$\tilde{W}(r, \lambda) = RI_1(qr)(q_0RI_0(qR) - 2I_1(qR))^{-1} \equiv \frac{RI_1(qr)}{\Delta_1(\lambda)}$$

and fundamental function

$$\tilde{E}(r, \rho, \lambda) = \frac{1}{\Delta_1(\lambda)} \begin{cases} I_1(qr)[\Delta_2(\lambda)I_1(q\rho) + \Delta_1(\lambda)K_1(q\rho)], & 0 < r < \rho < R; \\ I_1(qr)[\Delta_2(\lambda)I_1(qr) + \Delta_1(\lambda)K_1(qr)], & 0 < \rho < r < R, \end{cases}$$

here $\Delta_2(\lambda) = qRK_0(qR) + 2K_1(qR)$; $I_\nu(x)$, $K_\nu(x)$ are modified Bessel functions of the first and second kind.

For resuming the function $u(r, z) = \{u_1(r, z); u_2(r, z); u_3(r, z)\}$ by its image $\tilde{u}(r, \lambda)$ let's apply the operator matrix column to the matrix-element $[\tilde{u}(r, \lambda)]$ (function $\tilde{u}(r, \lambda)$ is defined by the formula (37)) according to matrices multiplication rule

$$H_{0;2}[\dots] = \begin{bmatrix} \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \dots V_{11}(z, \lambda)\Omega_0(\lambda)d\lambda \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \dots V_{21}(z, \lambda)\Omega_0(\lambda)d\lambda \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \dots V_{31}(z, \lambda)\Omega_0(\lambda)d\lambda \end{bmatrix},$$

as the inverse operator of the operator which is defined by (34).

As a result of elementary transformations we obtain unique solution of the *conjugate boundary value problem* (1)–(3):

$$u_j(r, z) = \sum_{m=1}^3 \left[\int_{l_{m-1}}^{l_m} W_{jm}(r, z, \xi) f_m(\xi) \varphi_m(\xi) d\xi + \int_0^R \int_{l_{m-1}}^{l_m} H_{jm}(r, \rho, z, \xi) F_m(\rho, \xi) \bar{\sigma}_m \varphi_m(\xi) d\xi \rho d\rho \right],$$

here $l_0 = 0$, $l_3 = +\infty$, $\varphi_1(z) = shz$, $\varphi_2(z) = \varphi_3(z) = 1$, $\bar{\sigma}_1 = G_3^{-1}G_1shl_1$, $\bar{\sigma}_2 = G_3^{-1}G_2$, $\bar{\sigma}_3 = 1$, Green's functions

$$W_{jm}(r, z, \xi) = \int_0^{\infty} \tilde{W}(r, \lambda) V_{j1}(z, \lambda) V_{m1}(\xi, \lambda) \Omega_0(\lambda) d\lambda$$

and the influence functions

$$H_{jm}(r, \rho, z, \xi) = \int_0^{\infty} \tilde{E}(r, \rho, \lambda) V_{j1}(z, \lambda) V_{m1}(\xi, \lambda) \Omega_0(\lambda) d\lambda$$

of the boundary value problem (1)–(3).

If $f_j(z)$ and $F_j(r, z)$ are given then the position of cylinder which is discussed becomes known.

Conclusion. By means of method of hybrid integral transform of Legendre-Fourier-Fourier type integral representation of solution of the problem of torsion of semi-bounded piecewise homogeneous elastic cylinder is obtained.

References:

1. Arutyunyan N. Torsion of Elastic Bodies / N. Arutyunyan, B. Abramyan. — Physmatgis, 1963. — 688 p.
2. Grilitsky D. Torsion of two-layer elastic medium / D. Grilitsky // Appl. Mech. — 1961. — Vol. 7, № 1. — P. 89–95.
3. Protsenko V. Hybrid integral Fourier-Hankel transforms and some torsion problem of piecewise-homogeneous media / V. Protsenko, T. Kashavel // Dynamics of systems with the mobile distributed load : col. of scien. p. — Kharkov, 1978. — № 1. — P. 120–124.
4. Konet I. Integral Mehler — Fock transforms / I. Konet, M. Leniuk. — Chernivtsi : Prut, 2002. — 248 p.
5. Stepanov V. The course of differential equations / V. Stepanov. — M. : Physmatgis, 1959. — 468 p.
6. Fikhtengol'ts G. Course of differential and integral calculus : in 3 volumes / G. Fikhtengol'ts. — M. : Nauka, 1969. — Vol. 3. — 656 p.

Методом гібридного інтегрального перетворення типу Лежандра-Фур'є-Фур'є одержано інтегральне зображення точного аналітичного розв'язку задачі кручення напівобмеженого кусково-однорідного пружного циліндра.

Ключові слова: рівняння Лежандра, рівняння Фур'є, задача Штурма-Ліувілля, гібридне інтегральне перетворення, гібридний диференціальний оператор, головні розв'язки.

Отримано: 12.05.2014

УДК 519.6

Д. О. Топчий, здобувач

Чорноморський державний університет
імені Петра Могили, м. Миколаїв**THE THEORY OF PLAFALES: НОВИЙ
ПІДХІД ДО КОНСТРУЮВАННЯ БАЗИСНИХ ФУНКЦІЙ
НА ТРИКУТНИКУ ПЕРШОГО ПОРЯДКУ**

У статті, на основі the theory of plafales, показані основні кроки алгоритму конструювання базисних функцій в МСЕ на основі двовимірної симплексу — трикутника першого порядку.

Ключові слова: *двовимірний симплекс, базисні функції, plafal (-es).*

1. Постановка проблеми. Трикутники — це перші скінченні елементи. Нагадаємо, що Курант (1943) [1–4] запропонував поділити квадратну комірку МСР на два трикутники, маючи на увазі успішну реалізацію ідеї лінійної інтерполяції на кожному із них. Ідея триангуляції дуже швидко стала звичною. Перші змістовні результати з'явилися після появи ЕОМ. Спочатку застосовували трикутники першого порядку [5]: Тернер, Клаф, Мартін, Топп, Сінг, Галлагер, Педлог, Бейлард. Потім з'явилися трикутники вищих порядків (комплексні моделі): Вебеке, Аргіріс, Феліппа, Зенкевич, Чанг.

Основна мета — на основі the theory of plafales [6–8] показати основні кроки алгоритму конструювання базисних функцій в МСЕ на основі двовимірної симплексу — трикутника першого порядку: дослідити функцію $L_i(x, y, t)$. На нашу думку, роль базисних функцій — четверна. ІТ платформи в МСЕ, які можуть бути створеними на основі алгоритмів the theory of plafales [9], містять у собі поняття алгоритмічної складності: задання (введення) в програмний комплекс базисних (і глобальних базисних) функцій і пошук розв'язання проблеми програмно-апаратним комплексом є функціями часу. Отже, базисні функції — функції часу. Безумовно, невід'ємною складовою частиною вищесказаної ІТ платформи є процес її функціональної візуалізації [10].

2. Витоки досліджень. Ця стаття ґрунтується на роботах [6–8], а також на матеріалах 42-ї конференції з прикладної математики (Польська Академія Наук) [9; 11].

3. Ціль роботи. Основна ціль роботи — показати алгоритм формування поверхні (на основі трикутника першого порядку) базисної функції від часу.

4. Актуальність роботи. ІТ платформи в МСЕ (на базі алгоритмів the theory of plafales) можуть включати в себе компонент штучного інтелекту — конструювання базисних функцій в автоматичному режимі.

5. Опис алгоритму. Будемо розглядати трикутник першого порядку — двовимірний симплекс з трьома вузлами у вершинах (рис. 1). Як відомо, базис $L_i(x, y)$ має вигляд:

$$L_1(x, y) = \frac{1}{2S} \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad L_2(x, y) = \frac{1}{2S} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x & y \\ 1 & x_3 & y_3 \end{vmatrix}, \quad (1)$$

$$L_3(x, y) = \frac{1}{2S} \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ 1 & x & y \end{vmatrix},$$

де S — площа трикутника.

Базис (1) задовольняє інтерполяційній гіпотезі:

$$L_i(x_k, y_k) = \delta_{ik}, \quad \sum_{i=1}^3 L_i(x, y) = 1, \quad (2)$$

де $L_i(x, y)$ — барицентричні координати симплекса; δ_{ik} — символ Кронекера, i — номер функції, k — номер вузла.

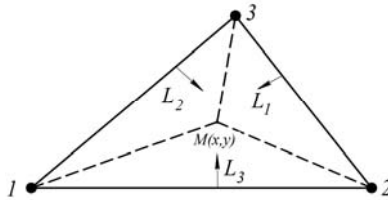


Рис. 1. Двовимірний симплекс

Розглянемо властивості функції $L_i(x, y, t)$:

$$L_i(x, y, t) = L_i(x, y) \circ G(t) = \begin{cases} L_i(x, y), & t \equiv T, i = \overline{1;3}, \\ N_i(x, y), & t \in (\gamma; T]; \gamma \geq 0; i = \overline{1;3}, \end{cases} \quad (3)$$

$$z_{x,y} = G(t),$$

параметр t — час; T — момент часу, при якому утворюється поверхня (1); відповідно $N_i(x, y)$ — поверхні, які утворюються в моменти часу $t \in (\gamma; T]$; $G(t)$ — глобальна функція часу змін аплікат поверхонь $L_i(x, y, t)$. В подальшому (у неявному вигляді), $G(t)$ виступатиме композицією об'єктів the theory of plafales.

Інтерполяційну гіпотезу для функцій $N_i(x_k, y_k)$ ($i = \overline{1;3}$) покладемо наступним чином:

$$N_i(x_k, y_k) = \delta_{ik} \circ G(t). \quad (4)$$

Безумовно, для функцій $N_i(x, y)$ справджується наступна оцінка:

$$0 \leq N_i(x, y) \leq 1. \quad (5)$$

5.1. Введення систем і підготовка обчислювального шаблону.

Введемо наступні системи the theory of palfales: the static canvas of palfal (статичний килим) $PF_k^{U^{SP}}$ [8, с. 16], the «ensemble» of the points (ансамбль точок) $PF_r^{ens(i,e)}$ [8, с. 569–575], the imaginary point of palfal (уявна точка) $PF^{(i,e)pi}$ [8, с. 29–86], the degenerate isolated point of palfal (вироджена ізольована точка) $PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}}$ [8, с. 23–25], the flickering point of palfal (мерехтлива точка) $PF^{(i,e)pid}$ [8, с. 87–152].

На статичному килимі $PF_k^{U^{SP}}$ ансамбль точок $PF_r^{ens(i,e)}$ [8, с. 569] створює трикутник першого порядку: $PF_r^{ens(i,e)}$ (рис. 2):

$$PF_k^{U^{SP}} : PF_r^{ens(i,e)} \rightarrow PF_r^{ens(i,e)} \quad (6)$$

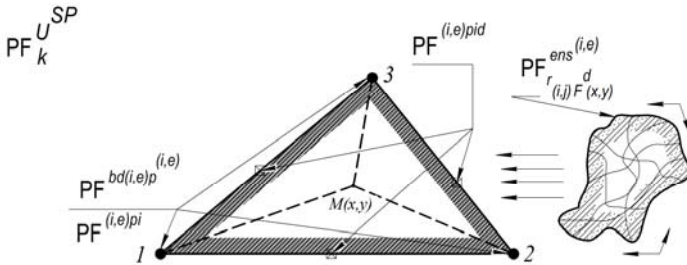


Рис. 2. Створення трикутника першого порядку

У якості обчислювального шаблону, у загальному вигляді, будемо розглядати (рис. 3). Вузли 1, 2, 3 — уявні $PF^{(i,e)pi}$ або вироджені ізольовані точки $PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}}$ (для кожної з трьох базисних функцій свій власний випадок розташування) між якими здійснюється перехід за часом [8, с. 31, с. 41]. Вздовж сторін 1 — 2, 2 — 3, 3 — 1 (відповідно по контуру) і усередині трикутника першого порядку (область D) розташовані мерехтливі точки $PF^{(i,e)pid}$.

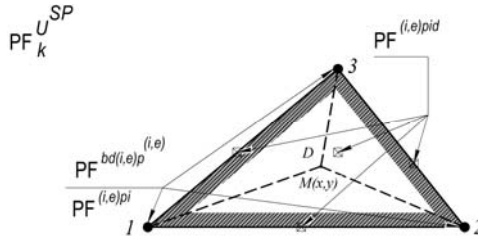


Рис. 3. Обчислювальний шаблон

5.2. Конфігурації обчислювального шаблону. Використовуючи інтерполяційну гіпотезу (2), покладемо [8, с. 30]:

$$N_i(x_i, y_i) = PF^{(i,e)pi} = a(m(t)) \pm 1 = 1, \quad (7)$$

де $a(m(t)) \pm 1$ — характеристична функція уявної точки; $m(t)$ — функція часу характеристичної функції. Використовуючи інтерполяційну гіпотезу (2), покладемо [8, с. 30]:

$$N_i(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(t)) \pm 1 = 0, \quad (8)$$

де $a(n(t)) \pm 1$ — характеристична функція виродженої ізольованої точки; $n(t)$ — функція часу характеристичної функції. Використовуючи властивість $0 \leq N_i(x, y) \leq 1$, покладемо значення вздовж сторін 1 — 2, 2 — 3, 3 — 1 і в області D [8, с. 88]:

$$N_i(x, y) = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1; \quad 0 \leq a(h(t)) \pm 1 < 1, \quad (9)$$

де $a(h(t)) \pm 1$ — характеристична функція мерехтливої точки; $h(t)$ — функція часу характеристичної функції.

Відповідно, для характеристичних функцій $a(m(t)) \pm 1$, $a(n(t)) \pm 1$, $a(h(t)) \pm 1$ виникають наступні можливості:

1. Для (7), (8), (9) існує спільне значення часу $t = T$ при якому вони мають місце, а отже $m(t)$, $n(t)$ і $h(t)$ є взаємопов'язаними між собою наступним чином:

$$\begin{cases} a(m(t)) = 0, \\ a(n(t)) = 1. \end{cases} \Rightarrow n(t) = f(m(t)); \quad (10)$$

$$h(t) = h_1(t) \circ h_2(t) = m(t, \alpha) \circ n(t, \alpha); \quad 0 < \alpha < 1 \quad (11)$$

дана конструкція — «м'яке» моделювання [12] конфігурації обчислювального шаблону.

2. $m(t)$ і $n(t)$ є довільними функціями, а отже для кожної із них можуть існувати власні моменти часу, при яких справджуються рівності (7), (8), (9).

Послідовність побудови (переходу за часом) базисних функцій складається з наступного ланцюгу: $L_1(x, y) \rightarrow L_2(x, y) \rightarrow L_3(x, y)$. Між базисними функціями здійснюються плавні переходи за часом. В наступному, побудову ланцюгів базисних функцій будемо проводити відповідно у двох вищезазначених можливостях. Відлік часу розпочнемо з $t = 0$.

5.3. Побудова базисної функції у 1-ому вузлі. Згідно з (4), (7), (8), (9) отримуємо конфігурацію базисної функції у 1-ому вузлі:

$$\begin{cases} N_1(x_1, y_1) = PF^{(i,e)pi} = a(m(t)) \pm 1 = 1, \\ N_1(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(t)) \pm 1 = 0; \quad k = 2, 3 \\ N_1(x, y)_{1-2,1-3,D} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = \alpha; \quad 0 < \alpha < 1, \\ N_1(x, y)_{2-3} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} \equiv 0. \end{cases} \quad (12)$$

У відповідності двох випадків 5.2 (конфігурації обчислювально-го шаблону), отримуємо:

1. Згідно (10):

$$\exists a = \ln: \begin{cases} \ln(m(t)) = 0, \\ \ln(n(t)) = 1. \end{cases} \Rightarrow n(t) = e \times m(t); \quad (13)$$

Покладемо $A: m(t) = t \Rightarrow n(t) = e \times t$. Тоді (11) набирає вигляду:

$$h(t) = t^{-|\alpha \mp 1|} \times (e \times t)^{|\alpha \mp 1|}; \quad 0 < \alpha < 1. \quad (14)$$

З (13) і A встановлюємо, що система (12) набирає чинності при $t = T = 1$:

$$\begin{cases} N_1(x_1, y_1) = PF^{(i,e)pi} = \ln(1) + 1 = 1, \\ N_1(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = \ln(e) - 1 = 0; \quad k = 2, 3, \\ N_1(x, y)_{1-2,1-3,D} = PF^{(i,e)pid} = \ln\left(1^{-|\alpha \mp 1|} \times (e \times 1)^{|\alpha \mp 1|}\right) = |\alpha \mp 1|; \\ 0 < \alpha < 1, \\ N_1(x, y)_{2-3} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = \ln(e) - 1 \equiv 0. \end{cases} \quad (15)$$

При $0 < t < 1$ система (12) модифікується у наступний вигляд (умови існування поверхонь (3)):

$$\left\{ \begin{array}{l} N_1(x_1, y_1) = PF^{(i,e)pi} = \ln(t) \pm 1, \\ N_1(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = \ln(e \times t) \pm 1; \quad k = 2, 3 \\ N_1(x, y)_{1-2,1-3,D} = PF^{(i,e)pid} = \ln(t^{-|\alpha \mp 1|} \times (e \times t)^{|\alpha \mp 1|}) \pm 1 = \alpha; \\ 0 < \alpha < 1, \\ N_1(x, y)_{2-3} = PF^{(i,e)pid} = \ln(h(t)) \pm 1 = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} \equiv \\ \equiv \ln(e \times t) \pm 1. \end{array} \right. \quad (16)$$

Функція $N_1(x, y)$ має вигляд:

$$N_1(x, y) = (\ln(t) \pm 1)^\circ (\ln(e \times t) \pm 1)^\circ (\ln(t^{-|\alpha \mp 1|} \times (e \times t)^{|\alpha \mp 1|}) \pm 1); \quad (17)$$

$$0 < t \leq 1; \quad 0 < \alpha < 1,$$

де композиції функцій в (17) рівносильні (15) і (16).

Плавний перехід від $L_1(x, y) \rightarrow N_2(x, y)$ здійснюється за правилами «absolute transition» (абсолютного переходу) і «absolute rever- sionary returning back transition after a certain time» (абсолютний реверсивний перехід через певний час) [8, с. 31; 8, с. 41]:

$$\left\{ \begin{array}{l} PF^{(i,e)pi} \rightarrow \Omega(g(t)) \quad PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}}, \\ g(t) = \left(\ln(m(1+c))^\circ \ln(n(1+c; \infty)) + (-1)^{[m(1+c)^\circ n(1+c; \infty)]} \right). \end{array} \right. \quad (18)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} \rightarrow \Omega(g^r(t)) \quad PF^{(i,e)pi}, \quad (k = 2) \\ g_1(t) = \left(\ln(m(1+c))^\circ \ln(n(T_2)) + (-1)^{[m(1+c)^\circ n(T_2)]} \right); \quad t \in [1+c; T_2], \\ g_2(t) = \left(\ln(m(T_2+d))^\circ \ln(n(T_2+d; \infty)) + (-1)^{[m(T_2+d)^\circ n(T_2+d; \infty)]} \right), \\ g^r(t) = g_1(t) \cup g_2(t). \end{array} \right. \quad (19)$$

$(1+c)$ — момент часу плавного переходу $L_1(x, y) \rightarrow N_2(x, y)$;
 $(T_2 + d)$ — момент часу плавного переходу $L_2(x, y) \rightarrow N_3(x, y)$;
 T_2 — момент часу, при якому, для функції $N_2(x, y)$ набирає чин- ність система (27).

2. Нехай $\forall m(t) : \exists t = T_1$ так що виконується (7):

$$N_1(x_1, y_1) = PF^{(i,e)pi} = a(m(T_1)) \pm 1 = 1. \quad (20)$$

Нехай $\forall n(t) : \exists t = T_2 \neq T_1$ так що виконується (8):

$$N_1(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(T_2)) \pm 1 = 0. \quad (21)$$

Зведемо (20) і (21) до єдиних умов (22), (23):

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2 > T_1 : \\ N_1(x_1, y_1) = PF^{(i,e)pi} = a(m(t)) \pm 1; \sup_t (a(m(t)) \pm 1) = 1; \quad t \in (0; T_2], \\ N_1(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(t)) \pm 1; \inf_t (a(n(t)) \pm 1) = 0; \\ t \in (0; T_2]; k = 2, 3, \\ N_1(x, y)_{1-2,1-3,D} = PF^{(i,e)pid} = \\ = a\left(\frac{1}{2} \times (1 - \beta) \times m(t) + \left(1 - \frac{1}{2} \times (1 - \beta)\right) \times n(t)\right) \pm 1 = \alpha; \\ 0 < \alpha < 1; \quad |\beta| < 1; \quad T_1 < t < T_2, \\ N_1(x, y)_{2-3} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = \inf_t (a(n(t)) \pm 1) = 0; \quad t \in (0; T_2]. \end{array} \right. \quad (22)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2 < T_1 : \\ N_1(x_1, y_1) = PF^{(i,e)pi} = a(m(t)) \pm 1; \quad \sup_t (a(m(t)) \pm 1) = 1; \quad t \in (0; T_1], \\ N_1(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(t)) \pm 1; \inf_t (a(n(t)) \pm 1) = 1; \\ t \in (0; T_1]; k = 2, 3, \\ N_1(x, y)_{1-2,1-3,D} = PF^{(i,e)pid} = \\ = a\left(\frac{1}{2} \times (1 - \beta) \times m(t) + \left(1 - \frac{1}{2} \times (1 - \beta)\right) \times n(t)\right) \pm 1 = \alpha; \\ 0 < \alpha < 1; \quad |\beta| < 1; \quad T_2 < t < T_1, \\ N_1(x, y)_{2-3} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = \inf_t (a(n(t)) \pm 1) = 1; \quad t \in (0; T_1]. \end{array} \right. \quad (23)$$

Умови (22) і (23) є модифікованими до конфігурації (12): умовами існування поверхонь (3). Функція $N_1(x, y)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} N_1(x, y) &= \left(a(m(t)) \pm 1 \right)^\circ \left(a(n(t)) \pm 1 \right) \times \\ &\times \left(a\left(\frac{1}{2} \times (1 - \beta) \times m(t) + \left(1 - \frac{1}{2} \times (1 - \beta)\right) \times n(t)\right) \pm 1 \right); \end{aligned} \quad (24)$$

$$|\beta| < 1; \quad t \in (0; T_1] \quad \text{або} \quad t \in (0; T_2],$$

де композиції функцій в (24) рівносильні (22) і (23).

Плавний перехід від $L_1(x, y) \rightarrow N_2(x, y)$ здійснюється за правилами «absolute transition» (абсолютного переходу) і «absolute rever-sionary returning back transition after a certain time» (абсолютний реверсивний перехід через певний час) [8, с. 31; 8, с. 41]:

$$\left\{ \begin{array}{l} PF^{(i,e)pi} \xrightarrow{\Omega(g(t))} PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}}, \\ g(t) = \left(a(m(T_{1,2} + c))^\circ a(n(T_{1,2} + c; \infty)) + (-1)^{[m(T_{1,2} + c)^\circ n(T_{1,2} + c; \infty)]} \right). \end{array} \right. \quad (25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} \xrightarrow{\Omega(g^r(t))} PF^{(i,e)pi}, \quad (k = 2) \\ g_1(t) = \left(a(m(T_{1,2} + c))^\circ a(n(T_3)) + (-1)^{[m(T_{1,2} + c)^\circ n(T_3)]} \right); \\ t \in [T_{1,2} + c; T_3], \\ g_2(t) = \left(a(m(T_3 + d))^\circ a(n(T_3 + d; \infty)) + (-1)^{[m(T_3 + d)^\circ n(T_3 + d; \infty)]} \right), \\ g^r(t) = g_1(t) \cup g_2(t). \end{array} \right. \quad (26)$$

$(T_{1,2} + c)$ — момент часу плавного переходу $L_1(x, y) \rightarrow N_2(x, y)$;
 $(T_3 + d)$ — момент часу плавного переходу $L_2(x, y) \rightarrow N_3(x, y)$;
 T_3 — момент часу, при якому, для функції $N_2(x, y)$ набирає чинність система (27).

5.4. Побудова базисної функції у 2-ому вузлі. Згідно з (4), (7), (8), (9) отримуємо конфігурацію базисної функції у 2-ому вузлі:

$$\left\{ \begin{array}{l} N_2(x_2, y_2) = PF^{(i,e)pi} = a(m(t)) \pm 1 = 1, \\ N_2(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(t)) \pm 1 = 0; \quad k = 1, 3, \\ N_2(x, y)_{1-2, 2-3, D} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = \alpha; \quad 0 < \alpha < 1, \\ N_2(x, y)_{1-3} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} \equiv 0. \end{array} \right. \quad (27)$$

У відповідності двох випадків 5.2 (конфігурації обчислювально-го шаблону), отримуємо:

1. З урахуванням (10), (13), (17), (18), (19):

$$\text{Покладемо } A: m(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow n(t) = e \times \left(t - \frac{1}{2}\right). \text{ Тоді (11) на-}$$

бирає вигляду:

$$h(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)^{-|\alpha \mp 1|} \times \left(e \times \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^{|\alpha \mp 1|}; \quad 0 < \alpha < 1. \quad (28)$$

З (13) і A встановлюємо, що система (27) набирає чинності при $t = T_2 = \frac{3}{2} > (1 + c) = (1 + 0, 1) = 1, 1$:

$$\left\{ \begin{aligned} N_2(x_2, y_2) &= PF^{(i,e)pi} = \ln\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right) + 1 = 1, \\ N_2(x_k, y_k) &= PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = \ln\left(e \times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\right) - 1 = 0; \quad k = 1, 3, \\ N_2(x, y)_{1-2,2-3,D} &= PF^{(i,e)pid} = \ln\left(\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)^{-|\alpha \mp 1|} \times \left(e \times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\right)^{|\alpha \mp 1|}\right) = \\ &= |\alpha \mp 1|; \quad 0 < \alpha < 1, \\ N_2(x, y)_{1-3} &= PF^{(i,e)pid} = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = \ln\left(e \times \left(\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\right)\right) - 1 \equiv 0. \end{aligned} \right. \quad (29)$$

При $1,1 < t < \frac{3}{2}$ система (27) модифікується у наступний вигляд (умови існування поверхонь (3)):

$$\left\{ \begin{aligned} N_2(x_2, y_2) &= PF^{(i,e)pi} = \ln\left(t - \frac{1}{2}\right) \pm 1, \\ N_2(x_k, y_k) &= PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = \ln\left(e \times \left(t - \frac{1}{2}\right)\right) \pm 1; \quad k = 1, 3, \\ N_2(x, y)_{1-2,2-3,D} &= PF^{(i,e)pid} = \ln\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)^{-|\alpha \mp 1|} \times \left(e \times \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^{|\alpha \mp 1|}\right) \pm 1 = \\ &= \alpha; \quad 0 < \alpha < 1, \\ N_2(x, y)_{1-3} &= PF^{(i,e)pid} = \ln(h(t)) \pm 1 = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} \equiv \\ &\equiv \ln\left(e \times \left(t - \frac{1}{2}\right)\right) \pm 1. \end{aligned} \right. \quad (30)$$

Функція $N_2(x, y)$ має вигляд:

$$\begin{aligned} N_2(x, y) &= \left(\ln\left(t - \frac{1}{2}\right) \pm 1\right) \left(\ln\left(e \times \left(t - \frac{1}{2}\right)\right) \pm 1\right) \left(\ln\left(\left(t - \frac{1}{2}\right)^{-|\alpha \mp 1|} \times \right.\right. \\ &\quad \left.\left. \times \left(e \times \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)^{|\alpha \mp 1|}\right) \pm 1\right); \quad 1,1 < t \leq \frac{3}{2}; \quad 0 < \alpha < 1, \end{aligned} \quad (31)$$

де композиції функцій в (31) рівносильні (29) і (30).

Плавний перехід від $L_2(x, y) \rightarrow N_3(x, y)$ здійснюється за правилами [8, с. 31; 8, с. 41]:

$$\left\{ \begin{array}{l} PF^{(i,e)pi} \rightarrow^{\Omega(g(t))} PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}}, \\ g(t) = \left(\ln \left(m \left(\frac{3}{2} + d \right) \right) \right)^{\circ} \ln \left(n \left(\frac{3}{2} + d; \infty \right) \right) + (-1)^{\lfloor m(\frac{3}{2}+d)^{\circ} n(\frac{3}{2}+d; \infty) \rfloor} \end{array} \right. \quad (32)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} \rightarrow^{\Omega(g^r(t))} PF^{(i,e)pi}, \quad (k=3) \\ g_1(t) = \left(\ln \left(m \left(\frac{3}{2} + d \right) \right) \right)^{\circ} \ln (n(T_3)) + (-1)^{\lfloor m(\frac{3}{2}+d)^{\circ} n(T_3) \rfloor}; \\ t \in \left[\frac{3}{2} + d; T_3 \right], \\ g_2(t) = \left(\ln (m(T_3 + q)) \right)^{\circ} \ln (n(T_3 + q; \infty)) + (-1)^{\lfloor m(T_3+q)^{\circ} n(T_3+q; \infty) \rfloor}, \\ g^r(t) = g_1(t) \cup g_2(t). \end{array} \right. \quad (33)$$

$\left(\frac{3}{2} + d \right)$ — момент часу плавного переходу $L_2(x, y) \rightarrow N_3(x, y)$;

T_3 — момент часу, при якому, для функції $N_3(x, y)$ набирає чинність система (39).

2. Побудова $N_2(x, y)$ зводиться до умов (34) і (35), які аналогічні за конструюванням до умов (22) і (23), з урахуванням (25) і (26).

$$\left\{ \begin{array}{l} T_2' = T_3 > T_1' > T_{1,2} + c : \\ N_2(x_2, y_2) = PF^{(i,e)pi} = a(m(t)) \pm 1; \quad \sup_t (a(m(t)) \pm 1) = 1; \\ t \in (T_{1,2} + c; T_3], \\ N_2(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(t)) \pm 1; \quad \inf_t (a(n(t)) \pm 1) = 0; \\ t \in (T_{1,2} + c; T_3]; \quad k = 1, 3, \\ N_2(x, y)_{1-2,2-3,D} = PF^{(i,e)pid} = \\ = a\left(\frac{1}{2} \times (1 - \beta) \times m(t) + \left(1 - \frac{1}{2} \times (1 - \beta)\right) \times n(t)\right) \pm 1 = \alpha; \\ 0 < \alpha < 1; \quad |\beta| < 1; \quad T_1' < t < T_2', \\ N_2(x, y)_{1-3} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = \inf_t (a(n(t)) \pm 1) = 0; \\ t \in (T_{1,2} + c; T_3]. \end{array} \right. \quad (34)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 T_{1,2} + c < T_2' < T_1' = T_3 : \\
 N_2(x_2, y_2) = PF^{(i,e)pi} = a(m(t)) \pm 1; \quad \sup_t(a(m(t)) \pm 1) = 1; \\
 t \in (T_{1,2} + c; T_3], \\
 N_2(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(t)) \pm 1; \quad \inf_t(a(n(t)) \pm 1) = 0; \\
 t \in (T_{1,2} + c; T_3]; \quad k = 1, 3, \\
 N_2(x, y)_{1-2,2-3,D} = PF^{(i,e)pid} = \\
 = a\left(\frac{1}{2} \times (1 - \beta) \times m(t) + \left(1 - \frac{1}{2} \times (1 - \beta)\right) \times n(t)\right) \pm 1 = \alpha; \\
 0 < \alpha < 1; \quad |\beta| < 1; \quad T_2' < t < T_1', \\
 N_2(x, y)_{1-3} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = \inf_t(a(n(t)) \pm 1) = 0; \\
 t \in (T_{1,2} + c; T_3].
 \end{array} \right. \quad (35)$$

Умови (34) і (35) є модифікованими до конфігурації (27): умовами існування поверхонь (3). Функція $N_2(x, y)$ має вигляд:

$$\begin{aligned}
 N_2(x, y) &= \left(a(m(t)) \pm 1\right)^\circ \left(a(n(t)) \pm 1\right) \times \\
 &\times \left(a\left(\frac{1}{2} \times (1 - \beta) \times m(t) + \left(1 - \frac{1}{2} \times (1 - \beta)\right) \times n(t)\right) \pm 1\right); \quad (36) \\
 &|\beta| < 1; \quad t \in (T_{1,2} + c; T_3],
 \end{aligned}$$

де композиції функцій в (36) рівносильні (34) і (35).

Плавний перехід від $L_2(x, y) \rightarrow N_3(x, y)$ здійснюється за правилами [8, с. 31; 8, с. 41]:

$$\left\{ \begin{array}{l}
 PF^{(i,e)pi} \rightarrow^{\Omega(g(t))} PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}}, \\
 g(t) = \left(a(m(T_3 + d))\right)^\circ a(n(T_3 + d; \infty)) + (-1)^{[m(T_3 + d) \cdot n(T_3 + d; \infty)]}.
 \end{array} \right. \quad (37)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} \rightarrow^{\Omega(g'(t))} PF^{(i,e)pi}, \quad (k = 3) \\
 g_1(t) = \left(a(m(T_3 + d))\right)^\circ a(n(T_4)) + (-1)^{[m(T_3 + d) \cdot n(T_4)]}; \quad t \in [T_3 + d; T_4], \\
 g_2(t) = \left(a(m(T_4 + q))\right)^\circ a(n(T_4 + q; \infty)) + (-1)^{[m(T_4 + q) \cdot n(T_4 + q; \infty)]}, \\
 g^r(t) = g_1(t) \cup g_2(t).
 \end{array} \right. \quad (38)$$

$(T_3 + d)$ — момент часу плавного переходу $L_2(x, y) \rightarrow N_3(x, y)$;

$(T_4 + q)$ — момент часу плавного переходу $L_3(x, y) \rightarrow N_1(x, y)$;

T_4 — момент часу, при якому, для функції $N_3(x, y)$ набирає чинність система (39).

5.5. Побудова базисної функцій у 3-ому вузлі. Побудова функції $N_3(x, y)$ відбувається аналогічно функції $N_2(x, y)$ з урахуванням конфігурації базисної функції (39):

$$\begin{cases} N_3(x_3, y_3) = PF^{(i,e)pi} = a(m(t)) \pm 1 = 1, \\ N_3(x_k, y_k) = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} = a(n(t)) \pm 1 = 0; \quad k = 1, 2, \\ N_3(x, y)_{3-1,3-2,D} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = \alpha; \quad 0 < \alpha < 1, \\ N_3(x, y)_{1-3} = PF^{(i,e)pid} = a(h(t)) \pm 1 = PF^{bd(i,e)p^{(i,e)}} \equiv 0. \end{cases} \quad (39)$$

5.6. Ансамблювання поверхонь. Виходячи із всього вищезначеного, отримуємо для (3), що $G(t)$ — глобальна функція часу змін аплікату поверхонь $L_i(x, y, t)$:

$$G(t) = N_1(x, y) \circ N_2(x, y) \circ N_3(x, y) \circ g(t) \circ g^r(t). \quad (40)$$

6. Висновки і перспективи досліджень. Існують можливості використання алгоритма конструювання поверхонь $L_i(x, y, t)$ для трикутників вищих порядків. Усі відомі інформаційні платформи в МСЕ, які використовуються в інженерних розрахунках, містять у собі відомий набір стандартних (О. Зенкевича) базисних функцій. Запропонований алгоритм не порушує монументальність поверхонь стандартних (О. Зенкевича) або альтернативних (А. Н. Хомченка) базисних функцій. ІТ платформа в МСЕ (на базі алгоритмів the theory of plafales) буде виконувати наступні функції: 1. В автоматичному режимі конструювати поверхню базисної функції на обчислювальному шаблоні, на якому людина ще не знайшла базис. Для того щоб платформа, у кінцевому вигляді, побудувала монументальну поверхню базисної функції їй потрібно «проаналізувати» проміжні поверхні, які утворюються до фінальної — монолітної (базисної) поверхні. Для реалізації цього вводиться ключовий параметр — час. 2. Відобразити формоутворення (рельєф) нестационарного температурного поля з динамічними термоелементами. 3. Функціонувати інтегрованим програмним комплексом, який буде знаходити фізично адекватні альтернативні моделі на складних обчислювальних шаблонах і виконувати свою роль в інженерних застосуваннях.

Список використаних джерел:

1. Courant R. Variational methods for the solution of problems of equilibrium and vibrations / R. Courant // Bull. Amer. Math. Soc. — 1943. — Vol. 49. — P. 1–23.

2. Сильвестер П. Метод конечных элементов для радиоинженеров и инженеров-электриков / П. Сильвестер, Р. Феррари. — М. : Мир, 1986. — 229 с.
3. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. — М. : Мир, 1979. — 392 с.
4. Марчук Г. И. Введение в проекционно-сеточные методы / Г. И. Марчук, В. И. Агошков. — М. : Мир, 1981. — 416 с.
5. Оден Дж. Конечные элементы в нелинейной механике сплошных сред / Дж. Оден. — М. : Мир, 1976. — 464 с.
6. Topchy D. The theory of plafales: the proof of P versus NP problem / D. Topchy // Best Global Publishing. — 2011. — 634 p.
7. Topchy D. The theory of plafales: the proof algorithms for millennium problems / D. Topchy // Best Global Publishing, 2013. — 695 p.
8. Topchy D. The theory of plafales: the proof algorithms for millennium problems / D. Topchy // Best Global Publishing, 2013. — 695 p. — Режим доступа: <http://eleanor-cms.ru/uploads/book.pdf>
9. Topchy D. The theory of plafales: Applications of new cryptographic algorithms and platforms in Military complex, IT, Banking system, Financial market / D. Topchy // XLII KONFERENCJA ZASTOSOWAC MATEMATYKI, 2013. — Режим доступа: <http://www.impan.pl/~zakopane/42/Topchy.pdf>
10. Зенкин А. А. Когнитивная компьютерная графика / А. А. Зенкин. — М. : Наука, 1991. — 192 с.
11. XLII KONFERENCJA ZASTOSOWAC MATEMATYKI, 2013. — Режим доступа к ресурсу: <http://www.impan.pl/KZM/42/>
12. Арнольд В. И. Жесткие и мягкие математические модели / В. И. Арнольд. — М. : МЦНМО, 2008. — 32 с.

In the article based on the theory of plafales the key steps of the algorithm of constructing of the basis functions in finite element method (based on the 2-simplex) are shown.

Key words: *2-simplex, basis functions, plafal (-es).*

Отримано: 17.03.2014

УДК 681.51

В. А. Федорчук*, д-р техн. наук,
Л. А. Митько**, канд. физ.-мат. наук,
В. А. Тихоход***, канд. техн. наук

*Каменец-Подольский национальный университет
имени Ивана Огиенко, г. Каменец-Подольский,

**Институт проблем моделирования
в энергетике им Г. Е. Пухова НАН Украины, г. Киев,

***Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт», г. Киев

ОЦЕНКА РАБОТОСПОСОБНОСТИ АВТОМАТИЧЕСКИХ СИСТЕМ НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА УСТОЙЧИВОСТИ

В работе рассмотрена задача выбора множества критически важных параметров автоматических систем, позволяющих оценить их работоспособность на основе анализа корневой чувствительности характеристического уравнения системы.

Ключевые слова: *работоспособность, контроль, характеристики, устойчивость.*

Введение. Судить о работоспособности автоматической системы можно непосредственно по характеристикам или их показателям, проверяя условия работоспособности или контролируя совокупность параметров, однозначно определяющих характеристики системы. Если контролировать все нестабильные параметры, то можно с полной достоверностью (с вероятностью равной единице) определить работоспособность системы. Однако реальные сложные системы могут иметь или большое число параметров, или параметры, контроль которых оказывается сложным [1]. В связи с этим возникает задача выбора для контроля из всей совокупности параметров системы только ограниченного числа нестабильных параметров. Вполне очевидно, что в этом случае судить о работоспособности системы можно только с некоторой вероятностью, меньшей единицы.

Упорядочение множества нестабильных параметров. Для облегчения задачи выбора ограниченного числа контролируемых параметров всю совокупность нестабильных параметров системы целесообразно упорядочить. Введем упорядочение параметров по степени их влияния на работоспособность системы. Один нестабильный параметр считается более важным, чем другой, если чувствительность корней характеристического уравнения системы к изменениям первого выше соответствующей чувствительности к изменениям второго. Такое упорядочение естественно с точки зрения работоспособности системы, поскольку положение корней в основном определяет ее динамические

возможности, т.е. ее состояние. При этом введение упорядочения множества нестабильных параметров позволяет определить функцию $p(v)$ вероятности правильности суждения о работоспособности системы в случае, если контролируется только ограниченное число нестабильных параметров v из общего числа параметров системы n .

По характеру подхода к упорядочению множества нестабильных параметров приходится различать два случая:

- 1) корни характеристического уравнения все различны;
- 2) среди множества корней имеются кратные корни.

Это обусловлено тем, что в первом случае в качестве чувствительности любого корня к изменению параметра можно рассматривать модуль частной производной от корня по данному параметру, ибо такая производная существует и ограничена. Во втором случае, при наличии кратных корней частные производные от кратных корней по нестабильному параметру обращаются в 0. Таким образом, чувствительность кратных корней оказывается всегда выше чувствительности некрратных. Поэтому при наличии кратных корней упорядочение в параметрах следует производить по модулю высшей производной кратного корня по нестабильному параметру. При этом порядок производной равен кратности данного корня.

Рассмотрим полином:

$$F(x, \Lambda) = x^n + a_{n-1}(\lambda_{n-1})x^{n-1} + \dots + a_1(\lambda_1)x + a_0(\lambda_0), \quad (1)$$

где $\Lambda = (\lambda_0, \dots, \lambda_n)$ — n -мерный вектор параметров.

Упорядочение в случае разных корней характеристического уравнения. Рассмотрим первый случай, когда все корни характеристического уравнения различны (простые корни).

Пусть при $\Lambda = \Lambda_0 = (\lambda_0^0, \dots, \lambda_n^0)$ все корни x_1^0, \dots, x_n^0 уравнения $F(x, \Lambda_0 = 0)$ различны и $\text{Re}x_i^0 < 0$.

Рассмотрим следующие неотрицательные числа:

$$t_{kp} = \left| \frac{1}{\text{Re}x_k^0} \frac{\partial x_k}{\partial \lambda_p} (x_k^0, \Lambda_0) \right| = \left| \frac{\frac{\partial F}{\partial \lambda_p}}{\text{Re}x_k^0 \frac{\partial F}{\partial x_k}} (x_k^0, \Lambda_0) \right| \quad (2)$$

Причем $k = 1, 2, \dots, n; p = 0, \dots, n-1$.

Определение 1. Вектор $T_{\lambda_p} = (t_{1p}, \dots, t_{np})$ назовем вектором относительных чувствительностей простых корней $x_k(\Lambda)$ уравнения $F(x, \Lambda)$ к изменению параметра λ_p в точке (x_k^0, Λ_0) .

Определение 2. В множестве $\{T_{\lambda_p}\}$ введем упорядочение, полагая $T_{\lambda_p} \geq T_{\lambda_m}$, если $\|T_{\lambda_p}\| \geq \|T_{\lambda_m}\|$. Отметим, что норма $A = \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}$, если $A = (a_1, \dots, a_n)$.

Аналогично введем упорядочение в множестве $\{\lambda_p\}$, полагая $\lambda_p \geq \lambda_m$, если $T_{\lambda_p} \geq T_{\lambda_m}$. В случае $\lambda_p > \lambda_m$ будем говорить, что параметр λ_p больше (или сильнее) λ_m .

Любое множество $\{\lambda_p\}$ оказывается вполне упорядоченным. Отметим, что множество $\{\lambda_p\}$ называется вполне упорядоченным, если для любых его элементов справедливо одно из 3-х соотношений [1]:

$$\lambda_i > \lambda_j; \lambda_i < \lambda_j; \lambda_i = \lambda_j.$$

Упорядочение в случае наличия кратных корней среди множества корней характеристического уравнения. Пусть при $\Lambda = \Lambda_0$ среди корней уравнения $F(x, \Lambda_0) = 0$ имеются кратные. Рассмотрим вполне упорядоченное множество корней уравнения (1) при $\Lambda = \Lambda_0$:

$$x_1^0 \leq x_2^0 \leq \dots \leq x_n^0, \quad (3)$$

причем здесь каждый корень повторяется столько раз, какова его кратность. Порядок в (3) соответствует расположению следующих неотрицательных чисел:

$$|Re x_1^0| \leq |Re x_2^0| \leq \dots \leq |Re x_n^0|,$$

причем, как и ранее, мы предполагаем, что $Re x_j < 0$.

Из множества $\{x_j^0\}$ удалим все достаточно большие элементы и будем в дальнейшем рассматривать лишь элементы

$$x_1^0 \leq x_2^0 \leq \dots \leq x_m^0 \quad (m \leq n), \quad (4)$$

для которых выполнено условие:

$$|Re x_i^0| \leq \gamma |Re x_1^0| \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (5)$$

где $\gamma > 1$ — некоторое число.

Таким образом, мы отбрасываем те корни уравнения (2), у которых $|Re x_j^0|$ (причем $j > m$) достаточно велики. Эти корни мало влияют на работоспособность, так как их реальные части велики по модулю, т.е. дают составляющие, быстро затухающие во времени.

В результате будем иметь два случая:

- 1) в множестве (4) все корни различны (этот случай рассмотрен выше);
- 2) в множестве (4) имеются кратные корни.

Пусть имеются корни, $x_1^0 \leq x_2^0 \leq \dots \leq x_n^0$, кратности которых соответственно $\alpha_1 \geq \alpha_2 \geq \dots \geq \alpha_k > 1$.

Рассмотрим следующие неотрицательные числа:

$$\varphi_{qp} = \left| \frac{1 \frac{\partial F}{\partial \lambda_p}(x_q^0, \Lambda_0)}{\operatorname{Re} x_k^0 \frac{\partial^{\alpha q} F}{\partial x_q^\alpha}(x_q^0, \Lambda_0)} [\alpha_q - 1]! \right| \quad (6)$$

Причем $q = 1, 2, \dots, k; p = 0, 1, \dots, n - 1$, $(k + 1)$ -мерные векторы:

$$\Phi_{\lambda_p} = (\varphi_{1p}, \varphi_{2p}, \dots, \varphi_{kp}, \varphi_{(k+1)p}), \quad (7)$$

где $\varphi_{(k+1)p} = \left\| \left(t_{lp}, t_{(l+1)p}, \dots, t_{mp} \right) \right\|$, $l = \sum_{i=1}^k \alpha_i + 1$, если $\sum_{i=1}^k \alpha_i < m$, и

$$\varphi_{(k+1)p} = 0, \text{ если } \sum_{i=1}^k \alpha_i = m.$$

Определение 3. Вектор Φ_{λ_p} назовем вектором относительных чувствительностей кратных корней $x_q(\Lambda)$ уравнения (1) к изменению параметра λ_p в точке (x_q^0, Λ_0) ($q = 1, 2, \dots, k; p = 0, 1, \dots, n - 1$).

Замечание 1. Легко проверить, что φ_{qp} может быть представлено в следующем виде:

$$\varphi_{qp} = \left| \frac{(\alpha_q - 1)! \frac{\partial F}{\partial \lambda_p}(x - x_q^0)^{\alpha_q - 1}(x_q^0, \Lambda_0)}{\operatorname{Re} x_k^0 \frac{\partial F}{\partial x_q}(x_q^0, \Lambda_0)} \right| \quad (8)$$

Выражения (8) и (2) отличаются множителем $(x - x_q^0)^{\alpha_q - 1}$, который обеспечивает необращённые в нуль $\frac{\partial F}{\partial x_q}(x_q^0, \Lambda_0)$ в случае, когда x_q^0 — корень кратности α_q . Поэтому, чем выше кратность корня, тем большей чувствительностью он должен обладать к изменению параметров.

Определение 4. В соответствии с замечанием 1 в множестве Φ_{λ_p} определим отношение порядка по следующему лексикографическому принципу:

$\Phi_{\lambda_p} > \Phi_{\lambda_q}$, если $\varphi_{1p} > \varphi_{1m}$ (остальные координаты φ_{ip} и φ_{im} не учитываются) или при $\varphi_{1p} = \varphi_{1m}$, $\varphi_{2p} > \varphi_{2m}, \dots, \varphi_{rp} > \varphi_{rm}, \varphi_{(r+1)p} > \varphi_{(r+1)m}$ ($r \leq k$).

Элементы $\Phi_{\lambda_p} > \Phi_{\lambda_q}$, если $\varphi_{ip} = \varphi_{im}$ ($i = 1, 2, \dots, k + 1$).

Определение 5. Отношение порядка в множестве $\{\lambda_p\}$ ($\lambda_{p_1} \leq \lambda_{p_2} \leq \dots \leq \lambda_{p_n}$) означает, что $\Phi_{\lambda_{p_1}} \leq \Phi_{\lambda_{p_2}} \leq \dots \leq \Phi_{\lambda_{p_n}}$.

При этом, если $\lambda_p > \lambda_m$, будем говорить, что λ_p больше (или сильнее) λ_m (индекс при λ_p означает его порядковый номер в множестве при введенном упорядочении).

Замечание 2. Очевидно, что множество $\{\lambda_p\}$ при введенном упорядочении (определения 1 и 5) оказывается вполне упорядоченным. Следовательно, в нем всегда можно указать v элементов, являющихся максимальными для всех остальных $n - v$.

Выбор контролируемых параметров для определения работоспособности автоматической системы. Автоматическую систему можно рассматривать как совокупность двух групп звеньев: объект управления (или регулирования) и регулятор. В ряде практических случаев характеристики объекта в период эксплуатации изменяются мало (характеристики объекта могут изменяться заметно, но при этом закон изменения известен оператору; этот случай аналогичен рассматриваемому). Тогда основные изменения, характеризующие степень работоспособности системы, определяются изменениями, происходящими в регуляторе. Это обстоятельство позволяет определить степень работоспособности системы управления по результатам контроля параметров регулятора. При выборе из всего множества параметров регулятора ограниченного числа контролируемых параметров будем учитывать чувствительность характеристического уравнения системы [2].

Передаточная функция замкнутой системы управления в общем случае имеет следующий вид [3]:

$$K(p) = \frac{K_1(p)}{K_2(p) + \sigma(p)K_1(p)}, \quad (9)$$

где $\frac{K_1(p)}{K_2(p)}$ — передаточная функция объекта, $\sigma(p)$ — коэффициент передачи регулятора.

Из выражения (9) следует, что изменения, происходящие в регуляторе, действительно сказываются на изменении характеристического уравнения системы, т.е. вызывают перемещения полюсов передаточной функции (9). Отсюда следуют приведенные выше положения: при выборе контролируемых параметров регулятора необходимо учитывать корневую чувствительность характеристического уравнения системы.

Определение 6. Пусть мы контролируем V наибольших параметров $\lambda_{i_1}, \lambda_{i_2}, \dots, \lambda_{i_V}$, регулятора и в результате контроля убеждаемся, что все контролируемые параметры не выходят за допустимые пределы. Тогда мы будем говорить, что с вероятностью $p(v)$ система работоспособна, причем $p(v) < 1$ определяется следующим соотношением:

$$p(v) = \frac{\sum_{j=1}^v v_j}{\sum_{j=1}^m v_j}, \quad (10)$$

где m — общее число нестабильных параметров; $v_j = \|T_{\lambda_{i_j}}\|$, если среди корней характеристического уравнения системы нет кратных ($\|T_{\lambda_{i_j}}\|$ определена выше), либо $v_j = |\varphi_{1i_j}|$, если есть кратные корни.

Пример. Рассмотрим автоматическую систему управления, изображенную на рис. 1.

Структурные блоки в схеме имеют следующую природу:

$$K_1(p) = \frac{k_1}{1 + T_1 p} \text{ — магнитный усилитель;}$$

$$K_2(p) = \frac{k_2}{1 + T_2' p + T_2'' p^2 + T_2''' p^3} \text{ — блок управления;}$$

$$K_3(p) = \frac{k_3}{1 + T_3 p} \text{ — гидравлический усилитель;}$$

$$K_4(p) = \frac{k_4}{p} \text{ — силовой гидропривод.}$$

k_5 — жесткая обратная связь.

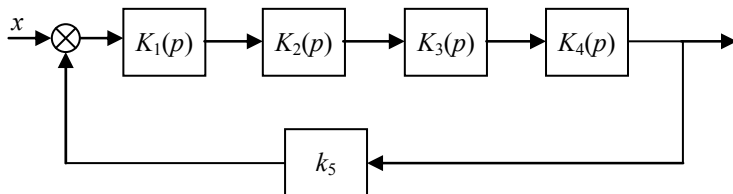


Рис. 1. Структурная схема системы управления

Характеристическое уравнение системы управления имеет следующий вид:

$$F(p) = p^6 + 8,47p^5 + 94,2p^4 + 510p^3 + a_2(\lambda_2)p^2 + a_1(\lambda_1)p + a_0(\lambda_0) = 0.$$

В системе имеются три нестабильных параметра:

$$a_2(\lambda_2) = 442 + \lambda_2; a_1(\lambda_1) = 144,4 + \lambda_1; a_0(\lambda_0) = 4,68 + \lambda_0.$$

В исходном (невозмущенном) состоянии векторный параметр имеет вид

$$\Lambda = (\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2) = 0 = (0, 0, 0) = \Lambda_0.$$

При этом корни характеристического уравнения (принято $p = x$) равны:

$$x_1^0 = -0,005; x_2^0 = x_3^0 = -0,47; x_4^0 = -5,53; x_{5,6}^0 = -0,47 \pm j8,66.$$

т.е. мы имеем второй случай, так как среди корней есть кратные.

Составим вектор относительной чувствительности Φ_{λ_i} . В силу формулы (6) $\Phi_{\lambda_0} = (\varphi_{10}), \Phi_{\lambda_1} = (\varphi_{11}), \Phi_{\lambda_2} = (\varphi_{12})$.

Так как у корня x_2 кратность $\alpha_2 = 2$, то имеем

$$\varphi_{1i} = \frac{1}{\operatorname{Re} x_2^0} \left| \frac{\frac{\partial F}{\partial \lambda_i}(x_2^0, \Lambda_0)}{\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x_2^0, \Lambda_0)} \right|; \Lambda_0 = 0 = (0, 0, 0); x_2^0 = -0,47; i = 0, 1, 2.$$

$$\text{Находим } \varphi_{10} = \frac{1}{0,47} a; \varphi_{11} = \frac{1}{0,47} 0,47 a; \varphi_{12} = \frac{(0,47)^2}{0,47} a,$$

где

$$a = \left| \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x_2^2}(x_2^0, 0) \right)^{-1} \right|.$$

В силу определения 4, не вычисляя a , можно утверждать, что $\Phi_{\lambda_0} > \Phi_{\lambda_1} > \Phi_{\lambda_2}$ и, таким образом, $\lambda_0 > \lambda_1 > \lambda_2$.

Предположим, что контролируемым является один параметр λ_0 (наибольший из всех). Определим при $v = 1$ вероятность $p(v)$ того, что система будет работоспособна (при условии, что контролируемый параметр λ_0 не выходит за заданные границы). В соответствии с определением 6 имеем:

$$p(1) = \frac{V_0}{\sum_{i=0}^2 v_i} = \frac{a}{a(1 + 0,47 + (0,47)^2)} \approx 0,6.$$

В том случае, если контролируемые параметрами являются λ_0 и λ_1 , вероятность работоспособности системы равна:

$$p(2) = \frac{a(1+0,47)}{a(1+0,47 + (0,47)^2)} \approx 0,8.$$

Как видно, вероятность работоспособности рассматриваемой автоматической системы выше при двух контролируемых параметрах, чем при контроле одного параметра системы.

Выводы. Таким образом, предложенный способ отбора множества контролируемых параметров обеспечивает оценку работоспособности автоматических систем.

Список использованной литературы:

1. Солодовников В. В. Теория автоматического управления техническими системами : учебное пособие / В. В. Солодовников, В. Н. Плотников, А. В. Яковлев. — М. : Изд-во МГТУ, 1993. — 492 с.
2. Розенвассер Е. Н. Чувствительность систем автоматического управления / Е. Н. Розенвассер, Р. М. Юсупов. — Л. : Энергия, 1969. — 208 с.
3. Филлипс Ч. Системы управления с обратной связью / Ч. Филлипс, Р. Харбор. — М. : Лаборатория Базовых Знаний, 2001. — 616 с.

The selecting a plurality of critical parameters of automatic systems via analysing the performance of such systems based on analysis of the sensitivity of the roots of the characteristic equation of the system.

Key words: *performance, control, characteristics, stability.*

Отримано: 19.03.2014

УДК 519.6

О. В. Щирба, асистент

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

ФУНКЦІОНАЛЬНІ ЗАЛЕЖНОСТІ ДЛЯ МЕТОДІВ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛІННЯ

У статті розглядається ідея розширення методів типу внутрішньої точки з скінченновимірною на нескінченновимірний випадки, досліджуються труднощі, пов'язані з застосуванням двоїстих методів скінченновимірних задач оптимізації, критерії оптимальності.

Ключові слова: *задачі оптимального управління, критерії оптимальності, множники Лагранжа.*

Вступ. За останнє десятиліття, методи чисельного розв'язання задач оптимального управління досягли досить високого рівня складності. Сучасні методи здатні розв'язувати важливі класи великомасштабних реальних проблем життя в науці і техніці. У загальному використовують два види методів: (а) прямі методи, які в основному, базуються на деяких надійних колокаціях, в тому числі спеціальних параметризаціях управління, і (б) непрямі методи, які, як правило, базуються або на декількох методах, або методах адаптивної колокації. Кожного разу, коли необхідні умови Ейлера-Лагранжа дають достатній опис проблеми, то доведено, що непрямі методи приводять до оптимального розв'язку. Проте вони вимагають досить детальних апріорних знань про послідовність оптимальних траєкторій.

На відміну від цього прямі методи можуть обходитися без цих серйозних обмежень, але мають тенденцію, що це потім призведе до неоптимального розв'язку. З цієї причини, гібридні методи комбінують: на першому кроці, використовують деякий прямий метод до тих пір, поки спеціальні параметризовані змінні керування не забезпечать грубе наближення послідовності до оптимального розв'язку; потім на другому кроці, працює непрямий метод, щоб вирішити нарешті проблему з високою точністю.

Потрібне розумне поєднання підходів функціонального аналізу, що реалізує ідеї прямих і непрямих методів в просторах з нескінченною розмірністю, а не в скінченновимірних — в протизагаді від вищезгаданих гібридних методів. Є декілька можливостей такого розширення. Справжнім методом для функціонального простору був метод запропонований в роботі [2]. Але, реалізація скінченнопросторового методу внутрішньої точки в межах запропонованого ними методу передбачає розв'язання послідовності дискретних задач на кожній із

послідовнотоншій сітці. Така процедура постраждала б від серйозних труднощів при наявності розривів змінних керування.

Ми звертаємося до центрального шляху у функціональному просторі, як математичного поняття і отримуємо основні теоретичні викладки роботи. Проаналізуємо труднощі, пов'язані з застосуванням двоїстих методів скінченновимірних задач оптимізації на випадок задачі оптимального управління в функціональних просторах та запропонуємо шляхи подолання цих труднощів.

Виклад основного матеріалу. Нехай $X = X_u \times X_y$ — функціональний простір над областю $\Omega := [0, 1]$. Припустимо, що $\dot{y} \in X_u$ для $y \in X_y$. Будемо використовувати розклад $x = (u, y)$ як взаємозамінну для елементів з простору X . Припустимо, що $\mathfrak{Z} : R^{n_u} \times R^{n_y} \rightarrow R$, $c : R^{n_u} \times R^{n_y} \times R^{n_y} \rightarrow R^{n_c}$, $c^r : R^{n_y} \times R^{n_y} \rightarrow R^{n_r}$ і $g^u : R^{n_u} \rightarrow R^{m_u}$ принаймні двічі, а $g^y : R^{n_y} \times R^{m_y}$ принаймні тричі неперервно диференційовні за Ліпшицем.

Розглянемо задачу оптимального управління

$$\int_{\Omega} \mathfrak{Z}(u(t), y(t)) dt \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$c(u(t), y(t), \dot{y}(t)) = 0,$$

$$c^r(y(0), y(1)) = 0,$$

$$g^u(u(t)) \geq 0,$$

$$g^y(y(t)) \geq 0.$$

Для компактніших аналітичних функціональних позначень, визначимо функціонал

$$J(x) = \int_{\Omega} \mathfrak{Z}(u(t), y(t)) dt$$

і оператор обмежень рівнянь c на просторі X

$$c(x) := \begin{bmatrix} \tilde{c}(x) \\ c^r(y(0), y(1)) \end{bmatrix},$$

де $\tilde{c}(x)(t) := c(u(t), y(t), \dot{y}(t))$ для $t \in \Omega$.

Оператор нерівностей g на X визначимо таким же чином:

$$g(x) := \begin{bmatrix} g^u(x) \\ g^y(y) \end{bmatrix},$$

де $g^u(x)(t) := g^u(u(t))$ і $g^y(x)(t) := g^y(y(t))$ для $t \in \Omega$.

Тоді сформульовану вище задачу оптимального управління можна записати як задачу відшукування

$$J(u) \rightarrow \min$$

при обмеженнях

$$\begin{aligned} c(x) &= 0, \\ g(x) &\geq 0. \end{aligned}$$

Зауважимо, що обмеження на область $\Omega := [0, 1]$ покладається лише для зручності викладок, оскільки будь-яка область легко зіставляється з нею за допомогою афінних перетворень. Це справедливо і для задач оптимального управління з невідомими на час, де ми визначимо $[t_0, T]$, щоб ввести t_0 і T в ролі нових скалярних параметрів управління.

Необхідні умови оптимальності вперше сформулювали Каруш, Куна та Таккер в контексті задачі нелінійного програмування. Необхідні, так само як і достатні умови оптимальності, потім були дані в різних формах рядом дослідників для нескінченновимірних задач. У порівнянні з скінченновимірними випадками, необхідні сильніші припущення, щоб гарантувати існування множників Лагранжа для нескінченновимірних задач.

У самому загальному випадку задача оптимізації може бути сформульована так:

$$\arg \min J(x)$$

при обмеженнях

$$g(x) \in K, \tag{1}$$

де J — функціонал визначений в дійсному банаховому просторі X , g — відображення з X в дійсний банаховий просторі Z і K — опуклий замкнений конус в Z . Оскільки будь-який замкнутий опуклий конус $K \subset Z$ визначає частковий порядок на Z , ми будемо писати $z_1 \leq z_2$, якщо $z_2 - z_1 \in K$. Нехай $K^+ := \{ l \in Z^* : \langle l, k \rangle \geq 0, k \in K \}$

спряжений конус до K . Функціонали J і g вважаються двічі неперервно диференційовними за Фреше.

Точка $x \in X$ називається регулярною, якщо

$$0 \in \text{int}(g(x) + g'(x)X - K),$$

де через int позначено топологічну внутрішність.

Теорема 1. (Необхідні умови) Нехай x — регулярний розв'язок задачі (1). Тоді існує деякий елемент $l \in K^+$ такий, що

$$J'(x) - g'(x)^* l = 0,$$

$$\langle l, g(x) \rangle = 0. \tag{2}$$

Теорема 2. (Достатні умови) Нехай x — регулярний розв'язок задачі (1) і існує множник Лагранжа $l \in K^+$ такий, що $J'(x) - g'(x)^* l = 0$ і

$\langle l, g(x) \rangle = 0$. Покладемо $L(x) = J(x) - \langle l, g(x) \rangle$. Припустимо, що існують $\delta > 0$ і $\beta > 0$ такі, що

$$\langle L''(x)h, h \rangle \geq \delta \|h\|^2, \quad (3)$$

для всіх $g'(x)h \in K + IRg(x)$ і $\langle l, g'(x)h \rangle \leq \beta \|h\|$. Тоді існує окіл U точки x такий, що x буде єдиним локальним розв'язком задачі (1) в U .

Значимо, що умов теореми 2, взагалі кажучи, не достатньо для задач оптимального управління, оскільки найчастіше розв'язок x^* регулярний тільки, якщо $X \subset L_\infty$, але $L''(x^*)$ є обмеженим тільки, якщо $L_2 \subset X$. Це показано в наступному прикладі.

Приклад 1. Розглянемо задачу оптимізації

$$\sqrt{1+u^2}$$

при обмеженнях

$$-1 \leq u \leq 1.$$

Оптимальним є тривіальний розв'язок $u^* = 0$ при повністю неактивних обмеженнях і, отже, множники Лагранжа перетворюються в нуль: $\eta_1 = \eta_2 = 0$.

Теорема 1 передбачає регулярність

$$0 \in \text{int}(g(u^*) + g'(u^*)X_0 - K)$$

з $g(u) = (u+1, 1-u)^T$ і $K := \{(a, b)^T : a \geq 0, b \geq 0\}$ для того, щоб гарантувати існування множників Лагранжа, які задовольняють умови Каруша-Куна-Таккера (2). Тут

$$U := \text{int}(g(0) + g'(0)X_u - K) = \left\{ (1+v-a, 1-v-b)^T : v \in X_u, a \geq 0, b \geq 0 \right\}.$$

Для того, щоб 0 був в середині U параметри $v \in X_0$ і $a, b \in K$ повинні бути такими, що

$$\begin{aligned} 1+v-a &= \epsilon_a \\ 1+v-b &= \epsilon_b \end{aligned} \Rightarrow a+b = 2 - \epsilon_a - \epsilon_b$$

для кожного $\epsilon_a, \epsilon_b \in B(0, \rho)$ з досить малим значенням ρ . Тому u^* регулярний тоді й тільки тоді, коли $X_u \subset L_\infty$.

З іншого боку, теорема 2 вимагає, щоб в цьому випадку $L''(u^*)$ була додатнєовизначена на всьому просторі X_u . Починаючи з $L''(0)(h, h) = 2 \|h\|_2^2$, це задовольняє дану вимогу тільки тоді, коли $L_2 \subset X_u$, що протирічить вимозі $X_u \subset L_\infty$ регулярності u^* . Таким чином, теорема 2 не застосовується.

Ці дві розбіжності норми можуть бути вирішені за допомогою двох різних норм самого простору і умови коерцитивності (3).

Теорема 3. (Достатні умови) Нехай $x \in$ регулярною точкою для задачі (1). Припустимо, що J і g визначені і двічі неперервно диференційовані по Фреше на деяких великих просторах $X_p \supset X$. Нехай виконуються умови (2) і $L(x) = J(x) - \langle l, g(x) \rangle$. Припустимо, що $\delta > 0$ і $\beta > 0$ такі, що $\langle L''(x)h, h \rangle \geq \delta \|h\|_p^2$ для всіх $g'(x)h \in K + IRg(x)$ і $\langle l, g'(x)h \rangle \leq \beta \|h\|_p$. Тоді існує окіл U точки x в X_p , такий, що $x \in$ єдиним локальним розв'язком задачі (1) на U .

Крім визначення характеристик розв'язку, множники Лагранжа, що пов'язані з оптимальною точкою x^* в співвідношеннях Каруша-Куна-Таккера, можна інтерпретувати як чутливість цілої функції щодо порушення відповідних обмежень.

Технічно, при відповідних припущеннях, можна показати, що, якщо x^* є розв'язком (1) з відповідним множником Лагранжа l , то при досить малих збуреннях $z \in Z$ існує відображення $z \mapsto x(z)$ таке, що $x(z)$ забезпечує

$$\min J(x)$$

при обмеженнях

$$g(x) - z \in K. \quad (4)$$

Крім того, похідною оптимального значення збуреної задачі (4) є $\partial_z J(x(z))|_{z=0} = l$. Зокрема, ця рівність є основою для побудови виваженої оцінки похибки адаптивних методів спеціально для задач оптимізації [4].

Крім того, разом з перетворенням в нуль множників Лагранжа (слабо) активних обмежень це може свідчити про неоднозначність розв'язку.

Приклад 2. Розглянемо задачу оптимізації

$$\min -y(1)$$

при умові $y(0) = 0$, $u \leq 1$, $\dot{y} = u$, $y \leq \max(1 - 3t, 0, 3t - 2)$ з очевидним розв'язком

$$y = \max\left(0, t - \frac{2}{3}\right)$$

і

$$u = \begin{cases} 0, & t < \frac{2}{3}, \\ 1, & t > \frac{2}{3}, \end{cases}$$

та відповідними множниками Лагранжа

$$\lambda = \begin{cases} 0, & t < \frac{2}{3}, \\ 1, & t > \frac{2}{3}, \end{cases}$$

$$\lambda^r = 0,$$

$$\eta^u = \lambda,$$

$$\eta^y = \delta_{\frac{2}{3}},$$

які задовольняють необхідні умови (2). Той факт, що множники Лагранжа перетворюються в нуль на цілому відрізку $[0, 2/3]$ означає, що розв'язок не є єдиним і управління можуть бути змінені без зміни значення цільового функціоналу. Фактично, всі можливі управління

\tilde{u} з $\int_0^{\frac{2}{3}} \tilde{u} dt = 0$ є оптимальними розв'язками.

Однак, слід зазначити, що множники Лагранжа можуть також перетворитися в нуль при єдиному розв'язку і, таким чином, це не означає неоднозначність. Якщо значення цільового функціоналу в даному випадку збільшується досить повільно, то розв'язок не змінюється (за винятком функції η^u на $[2/3, 1]$), але він буде єдиний.

Висновки. Розширення методів типу внутрішньої точки з скінченновимірною на нескінченновимірний випадки відбувається не зовсім просто: зрештою, поняття логарифмічної бар'єрної функції більше немає сенсу в нескінченновимірному налаштуванні. На щастя, версія взаємозалежності методу внутрішньої точки, в тому числі поняття центрального шляху, природним чином переноситься на нескінченну розмірність. Однак, деякі застережливі теоретичні міркування необхідні: відома невідповідність з двома нормами (див. [3]) настійно рекомендує використання різних норм для обробки диференційовності, з одного боку, і опуклості з іншого боку.

Список використаних джерел:

1. Бейко І. В. Розвиток методів розв'язуючих та асимптотично-розв'язуючих операторів для побудови оптимальних та асимптотично-оптимальних математичних моделей / І. В. Бейко // Вісник Київського університету. Серія: Кібернетика. — 2002. — Вип.3. — С. 10–15.
2. Alt W. The Lagrange-Newton method for state constrained optimal control problems / W. Alt, K. Malanowski // Comput. Optim. Appl. — 1995. — № 4(3). — P. 217–239.

3. Malanowski K. Sufficient optimality conditions for optimal control subject to state constraints / K. Malanowski // SIAM J. Control Optimization. — 1997. — № 35 (1). — P. 205–227.

In the paper the idea of extension methods such as interior-point with finite to infinite-dimensional cases are investigated difficulties associated with the use of dual methods of finite-dimensional optimization problems, optimality criteria.

Key words: *problems of optimum control, criteria of an optimality, Lagrange's multipliers.*

Отримано: 17.02.2014

УДК 519.217

В. К. Ясинський*, д-р фіз.-мат. наук, професор,

Є. В. Ясинський**, аналітик-програміст,

І. В. Юрченко*, канд. фіз.-мат. наук

* Чернівецький національний університет
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці,

** Університет Атабаска, м. Едмонтон, Канада

ПРО СТІЙКІСТЬ РОЗВ'ЯЗКУ ЛІНІЙНОГО АВТОНОМНОГО СТОХАСТИЧНОГО РІВНЯННЯ З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ ІЗ ЗОВНІШНИМИ ВИПАДКОВИМИ ЗБУРЕННЯМИ

Доведено існування сильного розв'язку лінійного дифузійного стохастичного диференціального рівняння з частинними похідними (ЛСДРзЧП) у відповідному просторі із зовнішніми випадковими збуреннями. Отримано достатні умови в термінах коефіцієнтів ЛСДРзЧП асимптотичної стійкості й нестійкості в середньому квадратичному сильного розв'язку цього рівняння.

Ключові слова: *стохастичне рівняння в частинних похідних, стійкість в середньому квадратичному, асимптотична стійкість.*

Вступ. Дослідженню детермінованих рівнянь з частинними похідними присвячено велику кількість робіт, які вказані в монографіях [1–3; 17], і не менша кількість робіт вітчизняних і закордонних вчених була опублікована в кінці ХХ — на поч. ХХІ ст.

Після введення поняття стохастичного диференціала та інтеграла, заміни змінних для стохастичного диференціала, визначення сильного розв'язку стохастичного диференціального рівняння (СДР) у відомих монографіях [4–6] та їх подальше поширення на класи стоха-

стичних диференціально-функціональних рівнянь [7–9] (див. наведену велику бібліографію в цих роботах) стало можливим дослідження асимптотично сильного розв'язку для СДРЗЧП (див., наприклад, роботи [5; 10–12; 16; 18] та ін.)

Подальше дослідження СДРЗЧП йшло шляхом створення математичних моделей складних реальних систем, які вимагають враховувати випадкові параметри в цих рівняннях (див. [6; 7; 12; 13] та ін.).

Дана робота присвячена дослідженню асимптотичної поведінки сильного розв'язку ЛСДРЗЧП з урахуванням випадкових параметрів у правій частині [10; 12].

§ 1. Постановка задачі. Розглянемо стохастичний експеримент з базовим імовірнісним простором [1; 4; 5; 7] $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$, $\mathbf{F} \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$ — фільтрація, де задана функція $u(t, x, \omega)$, яка є вимірною з імовірністю одиниця за t і x відносно мінімальної σ -алгебри $\mathcal{B}([0, T], \mathbf{R}^1)$ борельових множин на площині [13] та для якої

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{E} \left\{ |u(t, x, \omega)|^2 \right\} dx < \infty, \quad (1)$$

для всіх $t \in [0, T]$, $\mathbf{E}\{\cdot\}$ — математичне сподівання [14], $T \subset [0, \infty)$. Простір функцій $\{u(t, x, \omega)\}$, що мають властивість інтегровності (1), позначимо через \mathfrak{M}_T .

Уведемо норми [6; 15]:

$$\|u(t, x, \omega)\|_{L_{2\mathbf{R}^1}}^2 \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx; \quad (2)$$

$$\|u(t, x, \omega)\|_{L_{2T}}^2 \equiv \int_0^T |u(t, x, \omega)|^2 dt; \quad (3)$$

$$\mathbf{E}_u(t) \equiv \mathbf{E} \left\{ \|u(t, x, \omega)\|_{L_{2\mathbf{R}^1}}^2 \right\}, \quad (4)$$

де через $L_{2\mathbf{R}^1}$ і L_{2T} позначені простори функцій $\{u(t, x, \omega)\}$, які мають відповідні норми (2) і (3).

У просторі \mathfrak{M}_T треба ввести норму вигляду

$$\|u(t, x, \omega)\|^2 \equiv \int_0^T \mathbf{E}_u(t) dt = \int_0^T \mathbf{E} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx \right] dt. \quad (5)$$

Позначимо через

$$Q(A, q, p) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{kj} q^k p^j, \quad (6)$$

де $A \equiv \{a_{kj}\}$ — дійсна матриця розмірності $n \times m$, складена з елементів $a_{kj} \in \mathbf{R}^1$.

У просторі \mathfrak{M}_T розглянемо підпростір $\mathfrak{M}_{1T} \subset \mathfrak{M}_T$, для елементів якого справджується включення

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x, \omega) \in \mathfrak{M}_T, \quad (7)$$

де $A \equiv \{a_{kj}\}_{k,j=1}^n \subset \mathbf{R}^1$.

Далі розглянемо на $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{F}, \mathbf{P})$ задачу Коші для лінійного стохастичного диференціального рівняння з частинними похідними (ЛСДРЗЧП) вигляду

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x, \omega) \right] + Q\left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x, \omega) = \\ = \varphi(\xi(\omega)) Q\left(C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x, \omega) \frac{dw(t, \omega)}{dt}, \end{aligned} \quad (8)$$

$$Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x, \omega) \Big|_{t=0} = [Qu]_0, \quad (9)$$

де Q визначено (6), матриці $B \equiv \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$, $b_{ij} \in \mathbf{R}^1$; $C \equiv \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$, $c_{ij} \in \mathbf{R}^1$, де $\varphi(\bullet)$ — бєрова функція [13] з областю значень \mathbf{R}^1 , $\xi(\omega)$ — випадкова величина, яка задана щільністю $p_\xi(x)$ (або функцією розподілу $F_\xi(x) \equiv \mathbf{P}\{\omega: \xi(\omega) < x \forall x \in \mathbf{R}^1\}$ [14]), $w(t, \omega)$ — одновимірний вінерів процес [11], при цьому $\xi(\omega)$ не залежить від $w(t, \omega)$.

Під сильним розв'язком задачі Коші (8), (9) будемо розуміти неперервну з імовірністю одиниця за $t \in [0, T]$ функцію $u(t, x, \omega)$, узгоджену з фільтрацією $\{\mathcal{F}_t, t \in [0, T]\}$ і таку, що з імовірністю одиниця для кожної пари (t, x) задовольняє інтегральне стохастичне рівняння [1; 4; 11]

$$\begin{aligned} Q\left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(t, x, \omega) &= [Qu]_0 + \int_0^t Q\left(B, ds, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(s, x, \omega) + \\ &+ \int_0^t \varphi(\xi(\omega))Q\left(C, ds, \frac{\partial}{\partial x}\right)u(s, x, \omega)dw(s, \omega) \end{aligned} \quad (10)$$

з початковими не випадковими умовами (9).

§ 2. Існування розв'язку задачі Коші для ЛСДРЗЧП (8)–(9) у просторі \mathfrak{M}_T

Для встановлення факту існування сильного розв'язку задачі Коші для (8)–(9) доведемо спочатку допоміжний результат.

Лема 1. Перетворення Фур'є за x для функції $u(t, x, \omega)$

$$v(t, \sigma, \omega) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\sigma x} u(t, x, \omega) dx \quad (11)$$

не виводить її з простору \mathfrak{M}_T для довільного скінченного $T \subset \mathbf{R}^1$.

Доведення. Існування перетворення Фур'є впливає з того, що $u(t, x, \omega)$ з імовірністю одиниця належить $L_{2\mathbf{R}^1}$ для довільного $t \in [0, T]$ та

$$\mathbf{P}\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx > N\right\} \leq \frac{\mathbf{E}_u(t)}{N} \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow +\infty$.

Згідно з теоремою Планшереля [16] маємо

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |v(t, \sigma, \omega)|^2 d\sigma = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx,$$

тобто $\|v\|_{L_{2\mathbf{R}^1}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u\|_{L_{2\mathbf{R}^1}}$, а, отже, $\mathbf{E}_v(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathbf{E}_u(t)$.

Тоді, згідно з означенням норми в просторі \mathfrak{M}_T , будемо мати

$$\|v\|_{\mathfrak{M}_T} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \|u\|_{\mathfrak{M}_T}, \text{ що й доводить лему 1.}$$

Теорема 1. Нехай для задачі Коші (8), (9) виконуються умови:

- 1) корені полінома $P(\lambda, i\sigma) \equiv \lambda Q(A, \lambda, i\sigma) + Q(B, \lambda, i\sigma)$ для довільного $\sigma \neq 0$ задовольняють нерівність $\operatorname{Re} \lambda \leq \psi(\sigma) < 0$, $\psi(0) = 0$;
- 2) $\forall t \in [0, T]$ і $C \equiv 0_{k \times n}$ детерміноване рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t} \left[Q \left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u}(t, x) \right] + Q \left(B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u}(t, x) = 0 \quad (12)$$

має розв'язок $\tilde{u}(t, x)$ задачі Коші в $L_{2\mathbf{R}^1}$ з початковими умовами

$$Q \left(A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) \tilde{u}(t, x) = [Q\tilde{u}]_0; \quad (13)$$

3) випадкова величина $\varphi(\xi)$ не залежить від $w(t, \omega)$.

Тоді стохастична задача Коші (8), (9) при $C \neq 0_{k \times n}$ має розв'язок у просторі \mathfrak{M}_{1T} .

Доведення. Оскільки перетворення Фур'є [1] зберігає норму в \mathfrak{M}_{1T} за лемою 1, то достатньо довести існування сильного розв'язку задачі Коші лінійного СДР для $v(t, \sigma, \omega)$, заданого формулою (11), а саме

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[Q \left(A, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \right] + Q \left(B, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) = \\ = \varphi(\xi(\omega)) Q \left(C, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \frac{dw(t, \omega)}{dt}. \end{aligned} \quad (14)$$

Зауважимо, що для довільної дійснозначної матриці $D \equiv \{d_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$

маємо включення $Q \left(D, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_{1T}$ і розв'язок $v(t, \sigma, \omega)$

ЛСДР (14) при кожному $\sigma \neq 0$ існує та єдиний з точністю до стохастичної еквівалентності [3; 5; 8]. ЛСДР (14) слід тлумачити як інтегральне стохастичне рівняння

$$\begin{aligned} Q \left(A, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) = [Qv]_0 + \int_0^t Q(B, ds, i\sigma) v(s, \sigma, \omega) = \\ = \varphi(\xi(\omega)) \int_0^t Q(C, ds, i\sigma) v(s, \sigma, \omega) dw(s, \omega), \end{aligned}$$

для якого виконуються умови, що гарантують існування та єдиність сильного розв'язку з точністю до стохастичної еквівалентності [7, с. 266–270, теорема 4.1].

Позначимо через $H(t, \sigma)$ фундаментальний розв'язок детермінованої однорідної незбуреної задачі Коші (12), (13) для ЛСДРзЧП (8), (9) при $C \neq 0_{k \times n}$, тоді сильний розв'язок ЛСДР (14), (13) можна записати у вигляді інтегрального рівняння [9; 19]

$$v(t, \sigma, \omega) = v_0(t, \sigma) + \varphi(\xi(\omega)) \int_0^t H(t-s) Q(C, ds, i\sigma) v(t, \sigma, \omega), \quad (15)$$

де $v_0(t, \sigma)$ — розв'язок однорідної незбуреної задачі Коші

$$\frac{d}{dt} \left[Q \left(A, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) + Q \left(B, \frac{d}{dt}, i\sigma \right) v(t, \sigma, \omega) \right] = 0.$$

Згідно з [1], фундаментальний розв'язок $H(t, \sigma)$ має вигляд

$$H(t, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \oint_{\Gamma} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{P(\lambda, i\sigma)}, \quad (16)$$

де Γ — контур, що охоплює всі нулі многочлена $P(\lambda, i\sigma)$.

Застосувавши випадковий оператор $\varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma)$ до обох частин (15), отримаємо

$$\begin{aligned} \varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma) v(t, \sigma, \omega) &= \varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma) v_0(t, \sigma) + \\ + \int_0^t \varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma) H(t-s, \sigma) \varphi(\xi(\omega)) Q(C, ds, i\sigma) v(s, \sigma, \omega) d\omega(s, \omega). \end{aligned} \quad (17)$$

Розглянувши квадрат модуля величини лівої та правої частини рівняння (17) та використавши нерівність $|a+b|^2 \leq 2(|a|^2 + |b|^2)$, в результаті одержимо

$$\begin{aligned} & \left| \varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma) v(t, \sigma, \omega) \right|^2 \leq \\ & \leq 2 \left\{ \left| \varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma) v_0(t, \sigma) \right|^2 + \right. \\ & \left. + 2 \left| \int_0^t \varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma) H(t-s, \sigma) \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times \varphi(\xi(\omega)) Q(C, ds, i\sigma) v(s, \sigma, \omega) d\omega(s, \omega) \right|^2 \right\}. \end{aligned} \quad (18)$$

Позначимо через

$$z(t, \sigma) \equiv \mathbf{E} \left\{ \left| \varphi(\xi(\omega)) Q(C, dt, i\sigma) v(t, \sigma, \omega) \right|^2 \right\},$$

де $\mathbf{E}\{\cdot\}$ — операція математичного сподівання [14]. Далі, застосувавши операцію $\mathbf{E}\{\cdot\}$ до лівої та правої частини нерівності (18), врахо-

вуючи властивість інтеграла Іто стосовно обчислення $\mathbf{E}\{\bullet\}$ від квадрату інтеграла Іто [7, с. 245–249]

$$\mathbf{E}\left\{\left|\int_0^t f(t, \omega) dw(s)\right|^2\right\} = \int_0^t \mathbf{E}\left\{|f(s, \omega)|^2\right\} ds,$$

та враховуючи умову III) теореми 1, одержимо таку нерівність

$$z(t, \sigma) \leq 2\mathbf{E}\left\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\right\}|Q(C, dt, i\sigma)v_0(t, \sigma)|^2 + \\ + 2\int_0^t \mathbf{E}\left\{|f(s, \omega)|^2\right\}|Q(C, ds, i\sigma)H(t-s, \sigma)|^2 z(s, \sigma) ds. \quad (19)$$

Умова I) теореми 1 дає можливість одержати нерівність [1]

$$\mathbf{E}\left\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\right\}|Q(C, dt, i\sigma)H(t-s, \sigma)|^2 \leq L,$$

а умова II) визначає рівномірну обмеженість

$$\mathbf{E}\left\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\right\}|Q(C, dt, i\sigma)v_0(t, \sigma)|^2 \leq K.$$

Отримані вище нерівності дають оцінку

$$z(t, \sigma) \leq K + L \int_0^T z(s, \sigma) ds,$$

звідки, згідно з нерівністю Гронуолла [1], будемо мати експоненціальну оцінку

$$z(t, \sigma) \leq Ke^{Lt} \quad \forall t \in [0, T] \subset [0, \infty). \quad (20)$$

Таким чином, гарантується включення

$$\varphi(\xi(\omega))Q(C, dt, i\sigma)v(t, \sigma, \omega) \in \mathfrak{M}_T. \quad (21)$$

Залишилось отримати включення (21) для довільної дійсної матриці $D \equiv \{d_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$.

Дійсно, застосувавши випадковий оператор $\varphi(\xi(\omega))$ $Q(D, dt, i\sigma)$ до (16), аналогічно вищевикладеним міркуванням, можна записати нерівність

$$\mathbf{E}\left\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\right\}\mathbf{E}\left\{|Q(D, dt, i\sigma)v(t, \sigma, \omega)|^2\right\} \leq \\ \leq 2\mathbf{E}\left\{|\varphi(\xi(\omega))|^2\right\}|Q(D, dt, i\sigma)v_0(t, \sigma)|^2 + \quad (22)$$

$$+2 \int_0^t \mathbf{E} \left\{ \left| \varphi(\xi(\omega)) \right|^2 \right\} \left| Q(D, dt, i\sigma) H(t-s, \sigma) \right|^2 z(s, \sigma) ds,$$

де інтеграл, як функція верхньої межі інтегрування за $t \in [0, T]$, існує.

Отже, враховуючи оцінку (20) та умову I), отримуємо твердження теореми 1. ■

§ 3. Асимптотична поведінка в середньому квадратичному сильно розв'язку ЛСДРЗЧП

Спочатку доведемо допоміжне твердження.

Лема 2. Нехай для ЛСДРЗЧП (8), (9) виконуються умови теореми 1. Тоді: 1) для довільної матриці $C \neq 0_{k \times n}$ має місце включення

$$\mathbf{E} \left\{ \left| \varphi(\xi(\omega)) \right|^2 \right\} Q(C, dt, i\sigma) H(t, \sigma) \in L_{2,(0,+\infty)}, \quad (23)$$

2) для відповідної норми цього простору справджується рівність

$$\begin{aligned} & \mathbf{E} \left\{ \left| \varphi(\xi(\omega)) \right|^2 \right\} \left\| Q(C, dt, i\sigma) H(t, \sigma) \right\|_{L_{2T}}^2 = \\ & = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathbf{E} \left\{ \left| \varphi(\xi(\omega)) \right|^2 \right\} \left| Q(C, i\lambda, i\sigma) \right|^2}{\left| P(i\lambda, i\sigma) \right|^2} d\lambda \equiv S(\sigma). \end{aligned} \quad (24)$$

Доведення. 1) Використовуючи умову I) та формулу (16), можна отримати рівність

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} \left[Q(C, dt, i\sigma) H(t, \sigma) e^{-i\lambda t} \right] = \frac{1}{2\pi} \frac{Q(C, i\lambda, i\sigma)}{P(i\lambda, i\sigma)} \quad (25)$$

та, домноживши на $\mathbf{E} \left\{ \left| \varphi(\xi(\omega)) \right|^2 \right\}$ ліву та праву частину (25), отримуємо твердження (23).

Для доведення (24) застосуємо теорему Планшереля [1]:

$$\left\| Q(C, dt, i\sigma) H(t, \sigma) \right\|_{L_{2(0, \infty)}}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| Q(C, i\lambda, i\sigma) \right|^2}{\left| P(i\lambda, i\sigma) \right|^2} d\lambda \equiv S_1(\sigma).$$

Домноживши ліву та праву частину отриманої рівності на $\mathbf{E} \left\{ \left| \varphi(\xi(\omega)) \right|^2 \right\}$, отримуємо $S(\sigma)$ у формулі (24). ■

Теорема 2. Нехай виконуються умови теореми 1. Тоді:

1) якщо $\sup_{\sigma} S(\sigma) < 1$, тоді $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_U(t) = 0$, де

$$U(t, x, \omega) \equiv \varphi(\xi(\omega)) Q \left(D, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega)$$

для довільної дійснозначної матриці D ;

2) якщо $S(\sigma) > 1$ на множині Λ міри Лебега, тоді $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{E}_U(t) = +\infty$.

Доведення. Спочатку зауважимо, що з нерівності (18), внаслідок прямування до нуля додатного ядра при $t \rightarrow +\infty$, випливає прямування до нуля $z(t, \sigma)$ при $S(\sigma) < 1, \sigma \neq 0$.

1) Якщо в (24) виконується нерівність $S(\sigma) < 1$, тоді легко бачити прямування до нуля при $t \rightarrow +\infty$ модуля перетворення Фур'є $U(t, x, \omega)$ при довільній дійснозначній матриці D [19]. При цьому прямування є рівномірним відносно σ , якщо $\sup_{\sigma} S(\sigma) < 1$. Залишилося перейти до границі під знаком інтеграла Лебега і перша частина теореми 2 доведена.

Для доведення другої частини теореми 2 достатньо довести, що

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{+\infty} z(t, \sigma) d\sigma = \infty, \text{ оскільки має місце (24).}$$

Дійсно, нехай $S(\sigma) > 1$ на Λ додатної міри Лебега, тоді

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} z(t, \sigma) = +\infty, \text{ оскільки } z(t, \sigma) > 0. \text{ Теорема 2 доведена. } \blacksquare$$

§ 4. Задача втрати стійкості стрижня. У праці [12] досліджується поведінка стрижня, на який діє «білий шум». Математичною моделлю цього процесу будемо вважати стохастичне диференціальне рівняння в частинних похідних з похідною від вінерового процесу, яка з імовірністю одиниця не існує й названа «білим шумом», а саме

$$\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{dw(t, \omega)}{dt}, \quad (26)$$

де $a, b, c > 0$ з початковими умовами

$$u(0, x) = f_1(x), \quad \frac{\partial u(0, x)}{\partial t} = f_2(x) \quad (27)$$

та крайовими умовами

$$u(t, 0) = u(t, l) = \frac{\partial u(t, 0)}{\partial x} = \frac{\partial u(t, l)}{\partial x} = \frac{\partial^2 u(t, 0)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(t, l)}{\partial x^2} = 0. \quad (28)$$

Аналогічно до дискретного випадку [3] визначають статистичний запас стійкості S_a^2 за параметром a , як найбільш допустиму інтенсивність процесів з взаємно незалежними значеннями, при якій система стійка в l.i.m., тобто розв'язок стабілізується до нуля.

Тоді можна обчислити статистичний запас стійкості [9; 12] S_{k_1, k_2} системи (26)–(28)

$$S_{k_1, k_2} \equiv \sum_{k=0}^m a_{k_1, k_2} \frac{\partial^k u(t, x)}{\partial t^{k_1} \partial x^{k_2}} \quad (29)$$

за параметрами a_{k_1, k_2} , $k = k_1 + k_2$.

Якщо позначити $P(\lambda, \sigma) \equiv \sum_{k=0}^m a_{k_1, k_2} \lambda^{k_1} (i\sigma)^{k_2}$, тоді статистичний запас стійкості S_{k_1, k_2} системи обчислюється за формулою

$$S_{k_1, k_2} \equiv \left[\sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\lambda|^{k_1} |\sigma|^{k_2}}{|P(i\lambda, \sigma)|} d\lambda \right]^{-1}. \quad (30)$$

Використовуючи вищевикладене твердження (30), знайдено [9] статистичний запас стійкості S_a за параметрами a, b, c системи (26)–(28)

$$S \equiv \left[\sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 d\lambda}{(\sigma^4 + a\sigma^2 - b\lambda^2)^2 + c^2 \lambda^2} \right]^{-1} = 2ac. \quad (31)$$

Таким чином, система (26)–(28) є стійкою в l.i.m., для якого $2ac < 1$.

Нехай на систему (26)–(28) діють зовнішні випадкові «збурення» типу $\varphi(\xi(\omega))$ на праву частину СДРЗЧП (26). Ця ситуація може виникнути, якщо система розташована на платформі, рух якої диктується зовнішніми збуреннями $\varphi(\xi(\omega))$. Тоді (26) буде мати вигляд

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c \frac{\partial u}{\partial t} = \\ = \varphi(\xi(\omega)) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \frac{dw(t, \omega)}{dt}. \end{aligned} \quad (32)$$

Використовуючи означення статистичного запасу стійкості для системи (31), (27), (28), маємо

$$S(\varphi) \equiv \left[\mathbf{E} \left\{ \left| \varphi(\xi) \right|^2 \right\} \sup_{\sigma} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma^2 d\lambda}{\left(\sigma^4 + a\sigma^2 - b\lambda^2 \right)^2 + c^2 \lambda^2} \right]^{-1} = \quad (33)$$

$$= \mathbf{E} \left\{ \left| \varphi(\xi) \right|^2 \right\} 2ac.$$

Застосовуючи достатні умови асимптотичної стійкості в l.i.m. теореми 2, приходимо до висновку, що система (31), (27), (28) є стійкою в l.i.m., якщо

$$E \left\{ \varphi^2(\xi) \right\} 2ac < 1, \quad (34)$$

та нестійкою в l.i.m., якщо в (34) поміняти знак на протилежний.

4.1. Нехай $\xi(\omega)$ має закон розподілу

$$P\{\omega : \xi \equiv \mathbf{1}\} = P\{\omega : \xi = -1\} = \frac{1}{2}$$

та $\varphi(\xi(\omega)) \equiv \xi(\omega)$. Тоді $\mathbf{E}\{\xi\} = 0$, $D\{\xi\} = 1$ й умова (33) збігається з умовою (31).

4.2. Якщо в якості закону розподілу $\xi(\omega)$ вибрати пуассоновий

закон $\mathbf{P}\{\omega : \xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ та $\varphi(\xi) = \xi$, тоді $\mathbf{E}\xi = D\xi = \lambda$. Отже,

умова стійкості в l.i.m. системи (31), (27), (28) буде мати вигляд $2ac\lambda < 1$, а нестійкості, відповідно, $2ac\lambda > 1$.

4.3. Нехай $\xi(\omega)$ розподілена рівномірно на $[0, 1]$, тобто

$$P_{\xi}(x) = \begin{cases} 1, & \forall x \in [0, 1], \\ 0, & \forall x \notin [0, 1]. \end{cases}$$

Відомо, що $M\xi = \frac{1}{2}$, $M\xi^2 = \frac{1}{3}$. Якщо $\varphi(\xi) = \xi$, тоді умова

стійкості в l.i.m. системи (31), (27), (28) набуде вигляду $ac < \frac{3}{2}$, а не-

стійкості $ac > \frac{3}{2}$.

Висновок. Запропонована у цій статті стохастична модель складних систем, напевно, є першою спробою врахування в повному обсязі випадковостей при дослідженні реальних процесів, що описуються

диференціальними рівняннями з частинними похідними, у правій частині яких враховуються не тільки дифузійні збурення типу броунівського процесу [5; 10; 18; 19], але й випадкові збурення інших типів.

Список використаних джерел:

1. Беллман Р. Дифференциально-разностные уравнения / Р. Беллман, К. Кук. — М. : Мир, 1967. — 548 с.
2. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных / С. Г. Михлин. — М. : Наука, 1997. — 495 с.
3. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений / В. В. Степанов. — М. : Наука, 1978. — 521 с.
4. Гулинский А. В. Теория случайных процессов / А. В. Гулинский, А. Н. Ширяев. — М. : Физматлит, 2005. — 408 с.
5. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения и их применение / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1980. — 612 с.
6. Гихман И. И. Управляемые случайные процессы / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Наук. думка, 1977. — 251 с.
7. Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика : в 3-х томах. / В. С. Королюк, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. — Чернівці : Вид-во «Золоті литаври», 2009. — Т. 3: Випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика. — 798 с.
8. Царьков Е. Ф. Квазилинейные стохастические дифференциально-функциональные уравнения / Е. Ф. Царьков, В. К. Ясинский. — Рига : Ориентир, 1992. — 301 с.
9. Царьков Е. Ф. Случайные возмущения дифференциально-функциональных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Е. Ф. Царьков. — Рига : Зинатне, 2989. — 421 с.
10. Гихман И. И. Стохастические дифференциальные уравнения с частными производными : сб. научн. тр. / И. И. Гихман, А. В. Скороход. — К. : Ин-т математики АН УССР, 1981. — С. 25–59.
11. Дороговцев А. Я. Асимптотическое поведение решений уравнения теплопроводности с белым шумом в правой части / А. Я. Дороговцев, С. Д. Ивасишен, А. Г. Кукуш // Укр. мат. журн. — 1985. — Вып. 37, № 1. — С. 13–20.
12. Перун Г. М. Исследование задачи Коши для стохастических уравнений в частных производных / Г. М. Перун, В. К. Ясинский // Укр. мат. журн. — 1993. — Т. 45, № 9. — С. 1773–1781.
13. Дынкин Е. Б. Марковские процессы / Е. Б. Дынкин. — М. : Физматгиз, 1969. — 859 с.
14. Королюк В. С. Ймовірність, статистика та випадкові процеси. Теорія та комп'ютерна практика : в 3-х т. / В. С. Королюк, Є. Ф. Царков, В. К. Ясинський. — Чернівці : Золоті литаври, 2007. — Т. 1. Ймовірність. Теорія та комп'ютерна практика. — 444 с.
15. Колмогоров А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. — М. : Наука, 1976. — 541 с.

16. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров / Р. З. Хасьминский. — М. : Наука, 1969. — 367 с.
17. Эйдельман С. Д. Параболические системы / С. Д. Эйдельман. — М. : Наука, 1964. — 445 с.
18. Андреева Е. А. Управление системами с последействием / Е. А. Андреева, В. Б. Колмановский, Л. Е. Шайхет. — М. : Наука, 1992. — 333 с.
19. Ясинская Л. И. Асимптотическая устойчивость в среднем квадратическом тривиального решения стохастического дифференциально-функционального уравнения / Л. И. Ясинская, В. К. Ясинский // Укр. мат. журн. — 1980. — Вип. 32, №1. — С. 78–98.

It is proved the existence of the strong solution of the linear diffusion stochastic differential equation with partial derivations in the corresponding space with external random disturbances. It is obtained the sufficient conditions of the asymptotic stability and instability in the mean square of the strong solution of such equation.

Key words: *stochastic equation with partial derivations, stability in the mean square, asymptotic stability.*

Отримано: 27.02.2014

ВІДОМОСТІ ПРО АВТОРІВ

Абрамчук Василь Степанович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри математики і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, abramchuk_doc@inbox.ru

Абрамчук Ігор Васильович — старший викладач кафедри вищої математики Вінницького національного технічного університету, м. Вінниця, igrabramchuk@gmail.com

Бак Сергій Миколайович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики і методики навчання математики Вінницького державного педагогічного університету імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця, Sergiy.bak@gmail.com

Бомба Андрій Ярославович — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики та прикладної математики Рівненського державного гуманітарного університету, м. Рівне, abomba@ukr.net

Венгерський Петро Сергійович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент Львівського національного університету імені Івана Франка, м. Львів, Petro.vengersky@gmail.com

Верлань Андрій Анатолійович — кандидат технічних наук, Національний технічний університет України «КПІ», м. Київ, verlandr@gmail.com

Гнатюк Василь Олексійович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, професор кафедри алгебри і математичного аналізу Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Горун Павло Павлович — аспірант Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, Pavlo.Gorun@gmail.com

Гудима Уляна Василівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри алгебри і математичного аналізу Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Дорош Андрій Богданович — асистент кафедри прикладної математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, uefa2012@ukr.net

Заболотько Тетяна Олександрівна — аспірант Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут», м. Київ, zabolotkota@meta.ua

Івасишен Степан Дмитрович — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри математичної фізики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут», м. Київ, Ivasyshen_sd@mail.ru

Конет Іван Михайлович — доктор фізико-математичних наук, професор, проректор з наукової роботи, завідувач кафедри алгебри і математичного аналізу Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, konet51@ukr.net

Крока Любов Леонідівна — аспірант Рівненського державного гуманітарного університету, м. Рівне, l_kroka@ukr.net

Кукурба Віктор Романович — аспірант Національного університету «Львівська політехніка», м. Львів, vkuku@i.ua

Лісовська Валентина Петрівна — кандидат фізико-математичних наук, доцент, заступник завідувача кафедри вищої математики ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана», м. Київ, v.lisovskaya@i.ua

Літовченко Владислав Антонович — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, vladlit4@mail.ru

Махович Олександр Іванович — аспірант кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, umismag@gmail.com

Митько Лідія Олексіївна — кандидат фізико-математичних наук, Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ

Мусурівський Віктор Іванович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри системного аналізу, страхової і фінансової математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, victor_musa@i.ua

Неня Олександр Іванович — кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри вищої математики ДВНЗ «Київський національний економічний університет імені Вадима Гетьмана», м. Київ, alexni@ukr.net

Нікітін Анатолій Володимирович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри комп'ютерних дисциплін Буковинського державного фінансово-економічного університету, м. Чернівці, nik_tol@ambler.ru

Пилипюк Тетяна Михайлівна — асистент кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Тихоход Володимир Олександрович — кандидат технічних наук, старший викладач кафедри автоматизації проектування енергетичних процесів та систем Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут», м. Київ, tikhokhod@mail.ru

Топчий Дмитро Олегович — здобувач Чорноморського державного університету імені Петра Могили, м. Миколаїв, dima.topchy@gmail.com

Унгурян Галина Михайлівна — здобувач кафедри математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, galunochkau@ukr.net

Федорчук Володимир Анатолійович — доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський, fedvlad@ukr.net

Чабанюк Ярослав Михайлович — доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри промислової безпеки та охорони праці Львівського державного університету безпеки життєдіяльності, м. Львів, yaroslav_chab@yahoo.com

Черевко Ігор Михайлович — доктор фізико-математичних наук, професор, декан факультету математики та інформатики, завідувач кафедри математичного моделювання Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, i.cherevko@chnu.edu.ua

Щирба Олеся Вікторівна — асистент кафедри інформатики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

Юрченко Ігор Валерійович — кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри системного аналізу і страхової та фінансової математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, yurchiv@rambler.ru

Ясинський Володимир Кирилович — доктор фізико-математичних наук, професор, завідувач кафедри системного аналізу і страхової та фінансової математики Чернівецького національного університету імені Юрія Федьковича, м. Чернівці, yasinsk@list.ru

Ясинський Євген Володимирович — аналітик-програміст, університет Атабаска, м. Едмонтон, Канада

АЛФАВІТНИЙ ПОКАЖЧИК АВТОРІВ

А		М	
Абрамчук В. С.	5	Махович О. І.	42
Абрамчук І. В.	5	Митько Л. О.	183
		Мусурівський В. І.	140
Б		Н	
Бак С. М.	17	Неня О. І.	120
Бомба А. Я.	24	Нікітін А. В.	151
В		П	
Венгерський П. С.	33	Пилипюк Т. М.	160
Верлань А. А.	42		
Г		Т	
Гнатюк В. О.	55	Топчий Д. О.	170
Горун П. П.	68	Тихоход В. О.	183
Гудима У. В.	55		
Д		У	
Дорош А. Б.	80	Унгурян Г. М.	128
З		Ф	
Заболотько Т. О.	88	Федорчук В. А.	183
І		Ч	
Івасишен С. Д.	88	Чабанюк Я. М.	110
		Черевко І. М.	80
К		Щ	
Конет І. М.	98	Щирба О. В.	191
Крока Л. Л.	24		
Кукурба В. Р.	110	Ю	
		Юрченко І. В.	197
Л		Я	
Лісовська В. П.	120	Ясинський В. К.	197
Літовченко В. А.	128	Ясинський Є. В.	197

ЗМІСТ

Абрамчук В. С., Абрамчук І. В.
Комбінований метод розв'язування еліптичних рівнянь 5

Бак С. М.
Існування дозвукових періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці 17

Бомба А. Я., Крока Л. Л.
Числові методи комплексного аналізу при розв'язанні одного класу нелінійних еліптичних задач за умов ідентифікації параметрів 24

Венгерський П. С.
Чисельне дослідження математичної моделі сумісного стоку поверхневих і ґрунтових вод з території водозбору 33

Верлань А. А., Махович А. И. Аппроксимационные модели нестационарных тепловых процессов в неограниченной пластине с несимметричными граничными условиями 42

Гнатюк В. О., Гудима У. В.
Метод січної площини розв'язування задачі найкращої у розумінні сім'ї опуклих ліпшіцевих функцій рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення скінченновимірним підпростором 55

Горун П. П.
Асимптотична поведінка стрибкової процедури стохастичної оптимізації в схемі дифузійної апроксимації 68

Дорош А. Б., Черевко І. М.
Застосування сплайн-функцій для апроксимації розв'язків лінійних крайових задач із запізненням 80

Заболотько Т. О., Івасишен С. Д.
Повне аналітичне описання фундаментального розв'язку одного параболічного рівняння зі зростаючими коефіцієнтами 88

Конет І. М.
Гіперболічна крайова задача математичної фізики в кусково-однорідному циліндричному шарі 98

Кукурба В. Р., Чабанюк Я. М.
Процедура стохастичної оптимізації для моделі тестування з напівмарковськими переключеннями 110

Лісовська В. П., Неня О. І.
Дослідження експоненціальної стійкості розв'язків рівняння Маккі-Гласса з імпульсною дією 120

Літовченко В. А., Унгурян Г. М. Фундаментальний розв'язок задачі Коші для одного класу параболічних рівнянь із коефіцієнтами обмеженої гладкості.....	128
Мусурівський В. І. Про проблему стійкості стохастичних диференціально- функціональних рівнянь з імпульсними марковськими збуреннями та скінченним запізненням.....	140
Нікітін А. В. Оптимізація множин початкових значень в інтегральній моментній стійкості для лінійних стохастичних рівнянь у гільбертових просторах	151
Рулупіук Т. М. One problem of torsion of piecewise homogeneous elastic bodies.....	160
Топчий Д. О. The theory of plafales: новий підхід до конструювання базисних функцій на трикутнику першого порядку	170
Федорчук В. А., Митько Л. А., Тихоход В. А. Оценка работоспособности автоматических систем на основе анализа устойчивости	183
Щирба О. В. Функціональні залежності для методів оптимального управління.....	191
Ясинський В. К., Ясинський Є. В., Юрченко І. В. Про стійкість розв'язку лінійного автономного стохастичного рівняння з частинними похідними із зовнішними випадковими збуреннями.....	197
Відомості про авторів	210
Алфавітний покажчик авторів	213

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова
Національної академії наук України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Серія: Фізико-математичні науки

Збірник наукових праць

Випуск 10

Підписано до друку 30.06.2014 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офісний. Друк різнографічний.
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 12,6. Обл.-вид. арк. 11,7.
Тираж 100. Зам. № 643.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Надруковано в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.